1. Вводная

По российской классификации радиоволны с крайне высокими частотами (КВЧ) от 30 до 300 ГГц (длины волн $(10–1)\cdot10^{-3}$ м) относят к диапазону миллиметровых волн (ММВ).

В зарубежной классификации интервал частот 30...300 ГГц и 1…18 ГГц разделяется на диапазоны:

Таблица 1.1

Диапазон	Интервал частот, ГГц	Длины волн, 10^{-3} м	Полоса частот, ГГц
Ka	27 – 40	11,1 – 7,5	13
V	40 – 75	7,5 – 4,0	35
W	75 – 100	4,0 – 3,0	25
MM	110 – 300	2,75 – 1	190
L	1 – 2	300 – 150	1
S	2 – 4	150 – 75	2
C	4 – 8	75 – 37,5	4
X	8 – 12	37,5 – 25	4
K_U	12 – 18	25 – 16,7	6

Интерес к ММВ возник сразу же как только стали известны опыты Герца. В России первые опыты генерации излучения в терагерцовом диапазоне на волне $0,6\cdot10^{-3}$ м были осуществлены в Московском университете П.Н. Лебедевым в 1895 г., Глагольевой-Аркадьевой в 1924 г. в диапазоне от 0,129 мм до 5 см.

Генерация субмиллиметровых (СБМВ) длин волн $(0,1–1)\cdot10^{-3}$ м терагерцового диапазона (300–3000) ГГц до сих пор является проблемой.

Однако трудности в создании элементов устройств на ММ-волнах с одной стороны и значительные успехи в освоении волн декаметрового, метрового и дециметрового диапазонов с другой стороны уменьшили в то время внимание и заинтересованность в использовании ММ-волн в зародившихся в двадцатые годы наиболее важных и перспективных отраслях: радиосвязи, радиолокации, радиоуправлении, навигации и т.д. Для названных применений до сих пор остаются актуальными проблемы, особенно взаимодействия ММ-волн при распространении с газами атмосферы, отражения и рассеяния подстилающими земными покровами, объектами, эффекты дифракции в телекоммуникациях, приём в зоне затеняющих препятствий, а также в просветной радиолокации, в частности для периметрической охраны важных государственных и других объектов (границ).

Как известно, первые радиолокаторы декаметрового диапазона были созданы в Англии, России (1934г.), и несколько позднее в США (1935-1937гг.).

Для компьютерного и имитационного моделирования необходимо математическое описание тропосферного распространения, отражения и рассеяния. Существенный приоритетный вклад в эти теории декаметрового и метрового диапазонов радиоволн внесли труды Российских ученых: Введенский Б.А. (1934 г.), Щукин А.Н. (1940 г.), Исакович М.А. (1952 г.), Фейнберг Е.Л. (1961 г.) и др. Ссылки на их работы содержатся в [1.2]).

В начале 1940-х годов стало ясно, что использование даже сантиметровых волн (СМВ) с приемлемыми апертурами антенн до 1 м. не обеспечивает требуемой точности измерения дальности, угловых координат и скорости движения наземных, морских и низколетящих объектов.

Как известно, для антенн с круговой апертурой радиуса ρ_0, и времени обработки доплеровского сигнала T разрешающая способность по дальности δr, угловым координатам $\delta\vartheta \sim \lambda/2\rho_0$ и по скорости движущихся целей $\delta V \sim \lambda/2T$ пропорциональна длине волны. Так что поэтому уже на начальном этапе развития радиолокации стремились перейти от метровых волн к СМВ. Для повышения разрешающей способности по дальности $\delta r = \dfrac{c\,\tau}{2} = \dfrac{c}{2\Delta f}$ к импульсным сигналам с длительностью $\tau = 0{,}02$ - $0{,}1$ мкс и широкополосным сигналам с линейной частотной модуляцией (ЛЧМ-сигналам).

В пятидесятых годах считалось большим достижением различение двух стандартных британских буев, находящихся в 9 м друг от друга. При этом тогда же отмечалось, что несмотря на применение антенн с шириной диаграммы направленности $\delta\vartheta_{0.7} = 30'$ (раскрыв апертурной антенны $2\rho_0 = \dfrac{\lambda}{\delta\vartheta} \approx 115\lambda$) в азимутальной плоскости сильные отражения местными предметами СМВ затрудняли наблюдение за движущимися наземными объектами, а радиолокационное отображение местности на экране индикатора значительно отличалось от визуально наблюдаемого или фотографического (оптического) изображения.

В наше время с развитием радиосистем спутниковой, наземной и других видов радиосвязи, навигации, локации и радиоуправления почти все участки от L до K_u диапазонов частот оказались загруженными.

Так что растущие потребности в

– увеличении полосы частот до тысячи МГц в радиолокации для формирования радиоизображения лоцируемого объекта, в цифровых широкополосных телекоммуникационных системах;
– повышение точности слежения по углу порядка десятка, а иногда и единиц угловых секунд;
– измерении по доплеровским радиосигналам малых скоростей движущихся объектов в ближней радиолокации (нарушителей в периметрических охранных зонах, посадка вертолетов, сближение наземного транспорта или летательных аппаратов);

При распространении ММВ вблизи поверхности раздела воздуха и почвы (воды, асфальта, бетона и т.д.) и малых углах скольжения волна практически зеркально отражается гладким покровом и рассеивается хаотическими неровностями, что создает помехи обнаружению наземных целей, а интерференционные замирания совокупности прямого и отраженного (запаздывающего) сигнала искажают форму и ухудшают достоверность приема информации по атмосферному радиоканалу вблизи подстилающего покрова.

Литература

1. *Кугушев А.М., Голубева Н.С., Митрохин В.Н.* Основы радиоэлектроники. Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001.

Дополнительная литература

1. Радиоэлектронные системы. Основы построения и теория. Справочник. Под. ред. проф. Ширмана Я.Д. М.: ЗАО «Маквис», 1998.
2. *Андреев Г.А.* Цикл лекций «Отражение и рассеяние ММ-волн природными и антропогенными объектами». Электронная версия. МГТУ им. Н.Э. Баумана, М. 2004.

2. Уравнения Максвелла в дифференциальной и интегральной формах. Граничные условия. Волновое уравнение

Базовыми соотношениями теории распространения излучения электромагнитных волн, отражения, преломления, поглощения подстилающим покровом как диэлектриком являются уравнения Максвелла для векторов напряженности $\vec{E}$ – электрического и $\vec{H}$ – магнитного полей $\vec{D} = \varepsilon_c \vec{E}$, $\vec{B} = \mu_c \vec{H}$.

В дифференциальной форме уравнения Максвелла записываются с использованием дифференциальных операторов набла ∇ (градиент), дивергенции (div) и ротора (rot), применимого как к скалярной так и векторной функциям точки комплексной амплитуды $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(x,y,z) = \vec{E}(E_x, E_y, E_z)$.

В векторном математическом анализе в правой прямоугольной системе координат градиент как оператор представляет вектор с декартовыми составляющими в виде частных производных $\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z$, записываемого в виде

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{l}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{l}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{l}_z,$$

где $\vec{l}_{x,y,z}$ – базис $\vec{l}$ линейно независимых единичных векторов осей 0*x*, 0*y* и 0*z*, $\left|\vec{l}_{x,y,z}\right| = 1$. Координаты любого единичного вектора (например $\vec{\alpha}(\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$) являются его направляющими косинусами в базисе $\vec{l}_x, \vec{l}_y, \vec{l}_z$ Это утверждение следует из рассмотрения скалярного произведения (рис.2.1):

$$(\vec{\alpha} \cdot \vec{l}\,) = |\vec{\alpha}||\vec{l}_x|\cos\theta_x + |\vec{\alpha}||\vec{l}_y|\cos\theta_y + |\vec{\alpha}||\vec{l}_z|\cos\theta_z = \cos\theta_x + \cos\theta_y + \cos\theta_z .$$

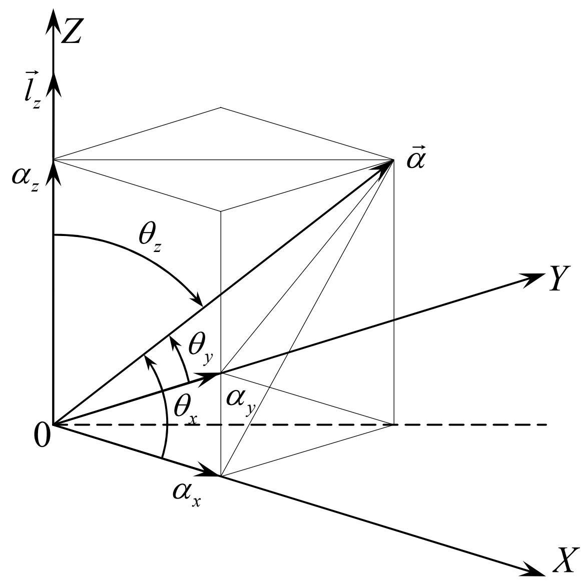

Рис.2.1.

Например, градиент скалярной функции точки электромагнитного поля $E(x, y, z, t)$ по определению

$$\nabla E = \frac{\partial E}{\partial x}\vec{l}_x + \frac{\partial E}{\partial y}\vec{l}_y + \frac{\partial E}{\partial z}\vec{l}_z$$

– представляет вектор с компонентами частной производной в базисе единичных векторов $\vec{l}_x, \vec{l}_y, \vec{l}_z$.

Для составляющей E_z – проекции отраженной волны $\vec{E}_r$ на ось z, совпадающей по направлению с нормалью $\vec{n}$ к плоскости xy $\frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial n}$ по определению

$$grad\, E_z = \nabla E_z = \frac{\partial E_z}{\partial n}\vec{n}.$$

Дивергенция векторной функции точки $\vec{E}(x, y, z)$ по определению представляет скалярное произведение градиента ∇ и $\vec{E}$, т.е. является скаляром, как сумма произведений составляющих производных $\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z$ и составляющих $E_{x,y,z}$, что записывается в виде:

$$div\vec{D} = \varepsilon_c div\,\vec{E} = \varepsilon_c(\nabla \cdot \vec{E}) = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right)\varepsilon_c.$$

Векторное произведение градиента ∇ и векторной функции точки $\vec{E}$ является вектором, обозначаемым $rot\,\vec{E}$ и представляемым квадратной матрицей (·) 3×3, которая выражается через миноры D_x, D_y, D_z в виде:

$$\left[\nabla \cdot \vec{E}\right] = rot\,\vec{E} = \begin{pmatrix} \vec{l}_x & \vec{l}_y & \vec{l}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{pmatrix} = D_x\vec{l}_x + D_y\vec{l}_y + D_z\vec{l}_z,$$

где $D_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}$, аналогично $D_{y,z}$.

Оператор Лапласа (лапласиан) определяется в виде повторной операции градиента как скалярное произведение и записывается в прямоугольной системе координат в виде

$$\Delta = (\nabla \cdot \nabla) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Лапласиан применяется как к скалярной $E(x,y,z)$, так и векторной $\vec{E}(x, y, z) = E_x\vec{l}_x + E_y\vec{l}_y + E_z\vec{l}_z$ функциям точки, что записывается соответственно в виде:

$$\Delta E = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) E(x, y, z) \text{ и}$$

$$\Delta \vec{E} = \Delta E_x \vec{l}_x + \Delta E_y \vec{l}_y + \Delta E_z \vec{l}_z .$$

В дальнейшем будет использоваться операция второго порядка для вектора $\vec{E}$ из векторной алгебры

$$grad\, div\, \vec{E} = \nabla \cdot \left(\nabla \cdot \vec{E} \right) = \Delta \vec{E} + \left[\nabla \cdot \left[\nabla \cdot \vec{E} \right] \right]$$

и следующая из неё

$$rot\, rot\, \vec{E} = \left[\nabla \cdot \left[\nabla \cdot \vec{E} \right] \right] = \nabla \left(\nabla \cdot \vec{E} \right) - \Delta \vec{E} . \qquad (*)$$

В дифференциальной форме уравнения Максвелла представляются в виде:

$$rot\, \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}_\sigma ; \qquad (2.1')$$

$$rot\, \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} ; \qquad (2.2')$$

$$div\, \vec{D} = q ; \qquad (2.3')$$

$$div\, \vec{B} = 0 , \qquad (2.4')$$

где q – плотность свободных электрических зарядов.

Система уравнений (2.1′)…(2.4′) дополняется материальными уравнениями электрической $\vec{D} = \varepsilon_c \vec{E}$ и магнитной $\vec{B} = \mu_c \vec{H}$ индукциями, где ε_c, μ_c – абсолютные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды и дифференциальным законом Ома $\vec{j}_\sigma = \sigma \vec{E}$, где σ – удельная проводимость.

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме (2.1′)–(2.4′) применимы для линейных сред с постоянными параметрами ε_c, μ_c и σ, либо непрерывно зависящими от координат.

В ситуации, например, когда диэлектрическая проницаемость ε' на границе раздела двух сред изменится скачком для описания векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ используют уравнения Максвелла в интегральной форме.

Переход от уравнений Максвелла в дифференциальной форме к интегральным основан на интегральных теоремах, устанавливающих зависимость между дифференциальными операторами, и соответствующими объёмными и поверхностными интегралами.

Так например, уравнение в дифференциальной форме (2.2′) записывается в следующей интегральной форме в плоскости *П* на рис.2.1

$$\oint\limits_{\Gamma}\left(\vec{E}\cdot d\vec{l}\right)=-\int\limits_{\Delta\Sigma}\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{\Sigma}\right), \qquad (2.2'')$$

где $\Delta\Sigma$ – площадь, охватываемая контуром Г=*abcd* (см. рис.2.2), а $\vec{n}_{\perp}=[\vec{n}\vec{\tau}]$ – векторное произведение единичных векторов нормали $\vec{n}$ к поверхности $d\vec{\Sigma}=\vec{n}_{\perp}d\Sigma$ в плоскости *П* и отрезка прямой $d\vec{l}=\vec{\tau}dl$.

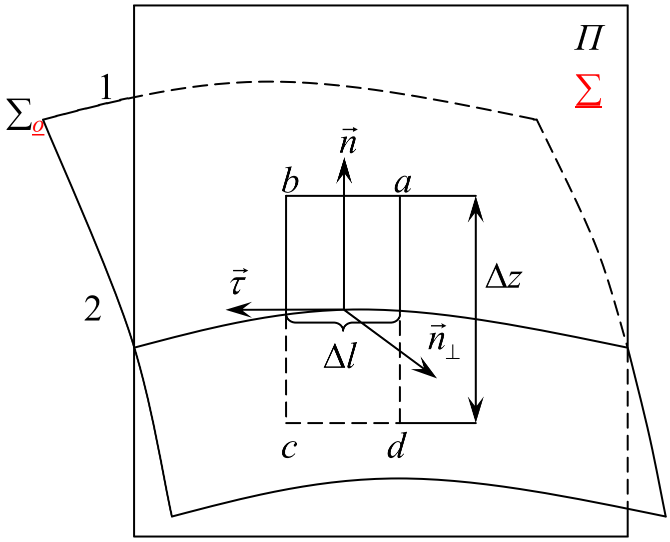

Рис.2.2.

Обход контура *abcd* составляет правовинтовую систему единичных векторов $\vec{n},\vec{\tau},\vec{n}_{\perp}$.

При $\Delta z\to 0$ стороны *ab* и *cd* остаются в разных средах и в пределе совпадают с $\Delta\vec{l}$. При этом $d\vec{l}=\vec{\tau}dl$ для *ab* и $d\vec{l}=-\vec{\tau}dl$ для *cd.*

При условии малости Δl получаются выражения

$$\left.\begin{aligned}\lim_{\Delta z\to 0}\int\limits_{ab}\left(\vec{E}\,d\vec{l}\right)=\left(\vec{E}_1\vec{l}\right)\Delta l=E_{1\tau}\Delta l\\ \lim_{\Delta z\to 0}\int\limits_{cd}\left(\vec{E}\,d\vec{l}\right)=-\left(\vec{E}_2\vec{l}\right)\Delta l=-E_{2\tau}\Delta l\end{aligned}\right\}. \qquad (2.2''')$$

При $\Delta z\to 0$ интегралы по *bc* и *da* равны нулю, правая часть в (2.2″) обращается в «0» (т.к. ΔΣ=0). В итоге, с учётом (2.2‴) соотношение (2.2″) преобразуется к виду $E_{1\tau}\Delta l=E_{2\tau}\Delta l$, из которого следует, что

$$E_{1\tau}=E_{2\tau}. \qquad (2.2\tau)$$

Аналогичное соотношение получается и для касательных составляющих напряжённости магнитного поля

$$H_{1\tau}=H_{2\tau}. \qquad (2.2'\tau)$$

Соотношения (2.2τ) и (2.2′τ) называются граничными условиями непрерывности (равенства) тангенциальных составляющих на плоской границе раздела двух сред.

Аналогично, дифференциальное уравнение (2.3′) записывается в интегральной форме

$$\oiint_{\Sigma_ц}\left(\vec{D}\cdot d\vec{s}\right)=\int_V \rho\, dV\,, \qquad (2.3'')$$

где вместо контура *abcd* выбран цилиндр с общей площадью поверхности $\sum_ц$ с площадью основания на границе раздела $\Delta\sum_o$ с нормалью $\vec{n}$ параллельно образующей цилиндра Δz.

Для значений составляющих векторов на границе раздела $D_{1n}=(\vec{D}_1\vec{n})=D_{2n}=(\vec{D}_2\vec{n})$ после предельных переходов, аналогичных выполненным при получении соотношения (2.2τ) для нормальных составляющих получается выражение в виде

$$(D_{1n}-D_{2n})\Delta\sum_o=\lim_{\Delta z\to 0}\int_V \rho\, dV\,.$$

Очевидно, что при любой конечной объёмной плотности заряда правая часть уравнения обращается в нуль и граничное условие записывается в виде

$$\varepsilon'_{c1}E_{1n}=\varepsilon'_{c2}E_{2n}\,. \qquad (2.3n)$$

Если на границе раздела двух сред имеется поверхностная плотность заряда ρ_Σ, то нормальная составляющая индукции $D_{1n}-D_{2n}=\rho_\Sigma$ терпит разрыв, также как и касательная.

Действительно, после подстановки в тождество (2.2τ) $E_{1\tau}=D_{1\tau}/\varepsilon'_1=E_{2\tau}=D_{2\tau}/\varepsilon'_2$ для касательных составляющих $D_{1\tau},D_{2\tau}$ получается выражение

$$\frac{D_{1\tau}}{D_{2\tau}}=\frac{\varepsilon_{1c}}{\varepsilon_{2c}}\,.$$

Аналогично выводу (2.3n) получается соотношение для нормальных составляющих вектора магнитной индукции

$$B_{1n}=B_{2n}\,, \qquad (2.3')$$

и, соответственно

$$\frac{H_{1n}}{H_{2n}}=\frac{\mu_2}{\mu_1}\,. \qquad (2.3'n)$$

При гармоническом $e^{-\mathrm{i}\omega t}$ изменении во времени электромагнитного поля $\vec{E}(x,y,z,t)=\vec{E}(x,y,z)e^{-i\omega t}$ с разделяющимися переменными координатой $\vec{r}=\vec{r}(x,y,z)$ и временем t система уравнений Максвелла (2.1′)–(2.4′) в системе СИ записывается [2.2] в виде:

$$rot\,\vec{H}=-i\omega\varepsilon_c\vec{E}+j_{\sigma}=-i\omega\varepsilon'_c\vec{E}\,; \qquad (2.1)$$

$$rot\,\vec{E} = i\omega\mu_c\vec{H}\,; \qquad (2.2)$$

$$div\,\vec{D} = q\,; \qquad (2.3)$$

$$div\,\vec{B} = 0\,. \qquad (2.4)$$

$\vec{E}$ можно выразить через вектор поляризации $\vec{p}$ и комплексной амплитудой $E(x,y,z)\exp\left[i(\vec{k}\vec{r})\right]$, где $\vec{E}(x,y,z) = \vec{p}E(x,y,z)$.

В неферромагнитной среде с удельной проводимостью $\sigma \neq 0$ зависимость плотности тока проводимости j_σ от поля $\vec{E}$ описывается законом Ома в дифференциальной форме:

$$\vec{j}_\sigma = \sigma\vec{E}. \qquad (2.5)$$

Для получения зависимости суммарного тока $\vec{j}$ от напряженности электрического поля $\vec{E}$ выделим общий множитель перед $\vec{E}$ в правой части уравнения (2.1) с учетом (2.5) и разделим на абсолютную электрическую постоянную $\varepsilon_0 = 10^7/4\pi c^2$. В итоге получается выражение:

$$-\frac{\mathrm{i}\omega}{\varepsilon_0}\left(\varepsilon_c + \frac{\mathrm{i}\sigma}{\omega}\right) = -\mathrm{i}\omega\left(\varepsilon + \mathrm{i}\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}\right) = -\mathrm{i}\omega(\varepsilon + \mathrm{i}60\lambda\sigma) = -i\omega\varepsilon'\vec{E}\,, \quad (2.6)$$

где

$$\varepsilon' = \varepsilon + \mathrm{i}\varepsilon'' \qquad (2.7)$$

– комплексная диэлектрическая проницаемость среды относительно вакуума. Штрих указывает на комплексность. Действительная часть ε, соответствующая производной по времени от электрической индукции, характеризует ток смещения, а мнимая

$$\varepsilon'' = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0} = \frac{\sigma 4\pi c^2}{kc10^7} = \frac{2c}{10^7}\lambda\sigma = 60\lambda\sigma \qquad (2.8)$$

– ток проводимости. В системе СИ размерности σ и $\omega\varepsilon_0$ совпадают.

Сумма $\vec{j}$ токов проводимости (2.5) и смещения записывается в компактном виде:

$$\vec{j} = -\mathrm{i}\omega\varepsilon'\vec{E}, \qquad (2.9)$$

При выводе трёхмерного уравнения Гельмгольца применим операцию $(*)$ $rot\,\vec{E}$ к уравнению (2.2) и в результате получим

$$rot\,rot\,\vec{E} = -i\omega\mu_c rot\,\vec{H}\,.$$

По уравнению (2.1) заменим $rot\,\vec{H} = -i\omega\varepsilon_c'\vec{E}$, а по $(*)$ $rot\,rot\,\vec{E}$, в итоге получим

$$-i\omega^2\varepsilon'_c\mu_c\vec{E} = \varepsilon_c grad\, div\,\vec{E} - \Delta\vec{E}\,.$$

В отсутствие свободных зарядов (q=0) из уравнения (2.3) следует, что $\varepsilon_c\left(\nabla\cdot\vec{E}\right) = div\,\vec{D} = div\,\varepsilon_c\vec{E} = 0$ и, следовательно, в правой части соотношения (∗) остаётся слагаемое $-\Delta\vec{E}$.

Систему уравнений Максвелла, где опущен временной множитель $e^{-i\omega t}$ вектора напряжённости электрического поля $\vec{E}$ можно выразить через вектор поляризации $\vec{p}$ и комплексную амплитуду $E(x,y,z)\exp\left[i(\vec{k}\cdot\vec{r})\right]$ в виде $\vec{E}(x,y,z) = \vec{p}\,E(x,y,z)\exp\left[i(\vec{k}\cdot\vec{r})\right]$.

В итоге получим трёхмерное однородное (q=0) уравнение Гельмгольца для комплексной амплитуды $E(x,y,z)$ в виде

$$\Delta E + \omega^2\varepsilon'_c\mu_c E = \Delta E + k'^2 E = 0\,, \tag{2.10}$$

где $k' = \omega\sqrt{\varepsilon'_c\mu_c}$ – комплексное волновое число.

Развёрнутое уравнение (2.10) записывается в виде

$$\frac{\partial^2 E(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E(x,y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E(x,y,z)}{\partial z^2} + k^2\varepsilon_0\mu_0\varepsilon' = 0\,. \tag{2.11}$$

Для заданного краевого условия $E(\vec{r}=0) = E_0$ уравнение (2.11) имеет частное решение

$$E(x,y,z) = E_0\exp\left[i\left(\vec{k}'\vec{r}\right)\right] = E_0\exp\left[i\left(k_x x + k_y y + k_z z\right)\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\varepsilon'}\right]. \tag{2.12}$$

После подстановки (2.12) в (2.11) получается соотношение $(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)\varepsilon_0\mu_0\varepsilon' = k^2\varepsilon_0\mu_0\varepsilon'$, где $k=2\pi/\lambda=\omega/c$ – волновое число в вакууме. С учётом абсолютных магнитной μ_c и комплексной диэлектрической проницаемостей среды комплексное волновое число представляется в виде

$$k' = \pm\omega\sqrt{\varepsilon'_c\mu_c} = \pm\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\varepsilon'\mu}\,. \tag{2.13}$$

В соответствии с принципом двойственности после замены $\{\vec{E}\to-\vec{H},\ \varepsilon_c\to\mu_c,\ \mu_c\to\varepsilon_c,\ \vec{j}_\sigma\to\vec{j}_m\}$ решение дифференциальных уравнений Максвелла (2.1)-(2.2) для комплексной амплитуды электрического поля и заданного стороннего тока могут быть использованы с перестановкой $\{\cdot\}$ для стороннего магнитного тока, как например, для исследования излучения волноводно-щелевых антенн.

Трёхмерное волновое уравнение записывается в виде:

$$\Delta E(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0\,. \tag{2.14}$$

Волновое уравнение для заданного краевого условия $E(\vec{r}=0) = E_0$ допускает частное решение в виде:

$$E(x,y,z,t)=E_0\exp\left(i\left[(\vec{k}'\vec{r})-\omega t\right]\right). \qquad (2.15)$$

В решении (2.15) были выбраны знаки «+» у $(\vec{k}'\vec{r})$ и «–» у ωt.

Выражение (2.15) описывает распространение плоской электромагнитной волны с равноамплитудным и синфазным распределением поля в начале координат $\vec{r}=0, t=0$.

3. Абсолютные, относительные диэлектрические и магнитные проницаемости сред

Абсолютная диэлектрическая проницаемость среды описывается соотношением

$$\varepsilon_c = \varepsilon_0 (1 + \chi_e),$$

где $\varepsilon_0 = \dfrac{10^7}{4\pi c^2} = \dfrac{1}{36\pi}10^{-9} = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\left[\dfrac{\text{Ф}}{\text{м}}\right]$ – электрическая постоянная в системе СИ [LMT^2I^2], χ_e - диэлектрическая восприимчивость (поляризуемость) единицы объема среды.

В вакууме $\chi_e = 0$ и ε_0 приобретает смысл диэлектрической проницаемости вакуума, т.е. абсолютной электрической постоянной.

Аналогично определяется абсолютная магнитная постоянная $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\left[\dfrac{\text{Гн}}{\text{м}}\right]$ в системе СИ с размерностью [$\text{L}^{-3}\text{M}^{-1}\text{T}^4\text{I}^{-2}$].

Обычно пользуются относительными диэлектрической и магнитной проницаемостями $\varepsilon = \varepsilon_c / \varepsilon_0$ и $\mu = \mu_c / \mu_0$.

С учётом того, что

$$\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} \cdot 4\pi 10^{-7} = \frac{[\text{L}^{-3}\text{M}^{-1}\text{T}^4\text{I}^2] \cdot [\text{LMT}^{-2}\text{I}^{-2}]}{c^2} = \frac{1}{c^2 [\text{L}^2/\text{T}^2]}$$

произведение $\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \mu = \varepsilon \mu / c^2$.

Поскольку у диэлектрических сред μ = 1, то с учётом множителя $\varepsilon_0 \mu_0 = \dfrac{1}{c^2}$, выражение (2.13) для k' преобразуется к виду:

$$k' = \pm \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon'} = \pm k\sqrt{\varepsilon'} .$$

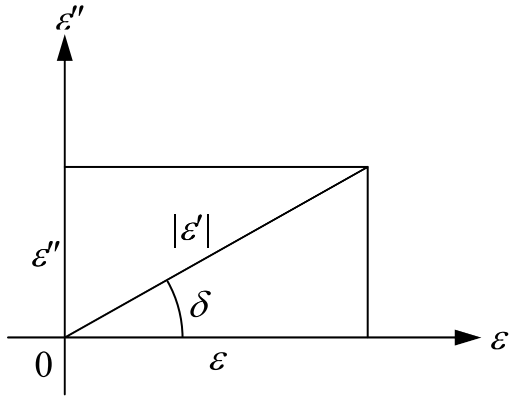

Рис.3.1. Комплексная диэлектрическая проницаемость на плоскости ε, ε''

Для неферромагнитных сред μ=1, что и было использовано при получении выражений (2.6) и (2.11).

На комплексной плоскости (ε,ε'') (рис.3.1) - комплексная диэлектрическая проницаемость (2.7) изображена в виде отрезка прямой $|\varepsilon'|$ (модуля) с составляющими по осям ординат ε'', абсцисс ε и аргументом – углом потерь δ .

С введением угла потерь δ соотношение (2.7) приводится к виду:

$$\varepsilon' = \varepsilon(1 + i\,\mathrm{tg}\,\delta) = |\varepsilon'| e^{\mathrm{i}\delta}, \qquad (3.1)$$

где $\mathrm{tg}\,\delta = \dfrac{\varepsilon''}{\varepsilon} = \dfrac{60\lambda\sigma}{\varepsilon}$ характеризует отношение тока проводимости к току смещения. Из соотношения (3.1) следует, что

$$\sqrt{\varepsilon'} = \sqrt{|\varepsilon'|} e^{i\delta/2}, \qquad (3.2)$$

где $|\varepsilon'| = \sqrt{\varepsilon^2 + \varepsilon''^2}$.

Диэлектрические среды (газы, жидкости) упрощенно можно представить, состоящих из полярных (H_2O) и неполярных (N_2, H_2) молекул. У полярных молекул H_2O в отсутствие внешнего поля $\vec{E}$ центры тяжести положительных и отрицательных зарядов совпадают. При воздействии внешнего поля молекулы деформируются, возникает дипольный момент $\vec{P}_e = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$ и происходит ориентационная поляризация, например у дистиллированной воды H_2O.

У неполярных молекул N_2, H_2 в отсутствие внешнего поля существует постоянный электрический дипольный момент $P_e = const$, обусловленный асимметрией центра тяжести электронных облаков и ядер. Центры тяжести не совпадают и во внешнем поле происходит электронная поляризация.

В кристаллических телах (NaCl) во внешнем поле происходит ионная поляризация.

Как убедимся в дальнейшем, составляющие диэлектрической проницаемости определяют коэффициенты отражения Френеля, преломления и поглощения земными покровами.

3.1. Формула Улаби-Добсона

По международным стандартам [4] почву рассматривают как четырехфазную смесь воздуха, частиц грунта, связанной и свободной воды. Строгая теория диэлектрической проницаемости почв как многофазной смеси громоздка и неудобна для практического использования, надо учитывать форму частиц, эффекты деполяризации и т.д.

В [4] предложена формула, в дальнейшем называемой Улаби-Добсона (Ulaby-Dobson) концептуально соответствующая теории четырехфазной смеси.

Для удобства учета связанной воды в почве выражен слагаемым через объемную влажность ρ_m, умноженную на комплексную диэлектрическую проницаемость воды ε'_W в степени q.

В итоге в диапазоне частот от единиц МГц до десятков ГГц для КДП почвогрунта получилось полуэмпирическое аппроксимационное соотношение [4] в виде:

$$\varepsilon'^q = \varepsilon_r^q (1 - p) + p + \rho_m \varepsilon_W'^q - \rho_m, \qquad (3.3)$$

где ε_r – диэлектрическая проницаемость, обычно принимаемая $\varepsilon_r = 4{,}73$ в соответствии с экспериментальными данными [4], $p = 1 - \dfrac{\rho}{\rho_r}$ - порозность грунта (объемное содержание воздуха в грунте), а ρ_r - плотность твердой породы основы грунта, ρ - плотность сухого грунта, обычно $\rho = 1{,}1...1{,}7$ г/см^3, а $\rho_r = 2{,}65...2{,}75$ г/см^3 [4].

Из соотношения (3.3) для оценки действительной составляющей диэлектрической проницаемости ε сухого грунта ($\rho_m = 0$) следует выражение:

$$\varepsilon = \left[\varepsilon_r^q (1-p) + p\right]^{1/q}. \tag{3.4}$$

3.2. Дебаевская релаксационная модель воды

Взаимодействие внешнего электромагнитного поля с полярными молекулами диэлектрических жидких проводящих сред математически описывается феноменологической дебаевской теорией релаксационных процессов.

По концепции Дебая [3.4] после выключения внешнего поля с начальным условием $t = 0$, $P_e(0) = P_{e0}$ ориентационная поляризация исчезает во времени по экспоненциальному закону

$$P_e(t) = P_{e0}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \tag{3.5}$$

со временем релаксации τ.

Выражение для частотной зависимости $\varepsilon'(\omega)$ воды постулируется в виде:

$$\varepsilon'(\omega) = \varepsilon_\infty + \widehat{P}_e(\omega), \tag{3.6}$$

где нормированное Фурье преобразование функции (3.5) имеет вид

$$\widehat{P}_e(\omega) = \frac{1}{P_{e0}\tau}\int_0^\infty P_e(t)\exp(\mathrm{i}\omega t)\,dt = \frac{1}{1-\mathrm{i}\omega\tau}. \tag{3.7}$$

После введения в (3.6) параметров ε_∞ и $\varepsilon_=$ (получающихся при $\omega = \infty$, $\widehat{P}_e(\infty) = 0$ и $\omega = 0$, $\widehat{P}_e(0) = 1$) выражение (3.6) преобразуется к виду:

$$\varepsilon'_W = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_= - \varepsilon_\infty}{1-\mathrm{i}\omega\tau} = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_= - \varepsilon_\infty}{1+\omega^2\tau^2} + \frac{\mathrm{i}\omega\tau(\varepsilon_= - \varepsilon_\infty)}{1+\omega^2\tau^2} = \varepsilon + \mathrm{i}\varepsilon'', \tag{3.8}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_= - \varepsilon_\infty}{1+\omega^2\tau^2}, \\ \varepsilon'' &= \frac{\omega\tau(\varepsilon_= - \varepsilon_\infty)}{1+\omega^2\tau^2}. \end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

Как следует из соотношения (3.8) при $\omega = 0$ $\varepsilon'_W = \varepsilon_=$, а при $\omega = \infty$ $\varepsilon'_W = \infty$. В непроводящей жидкой среде из-за релаксации $\tau \neq 0$ возникают значительные диэлектрические потери, которые и учитываются мнимой составляющей ε'' (3.9).

Для минерализованной воды (морская, океаническая, почвенная и т.д.) из-за ионной проводимости σ в соотношение (3.8) добавляется слагаемое $i60\lambda\sigma$, увеличивающую мнимую составляющую и выражение для мнимой составляющей (3.9) преобразуется к виду:

$$\varepsilon'' = \frac{\omega\tau(\varepsilon_= - \varepsilon_\infty)}{1+\omega^2\tau^2} + 60\lambda\sigma_\varsigma. \tag{3.10}$$

В соотношениях (3.8)–(3.10) $\varepsilon_=$ и ε_∞ диэлектрические проницаемости пресной воды соответственно в постоянном ($\omega = 0$) и гиперчастотном (оптическом) ($\omega = \infty$) полях, τ – время релаксации молекул после отключения электромагнитного поля с частотой ω, σ – ионная удельная проводимость.

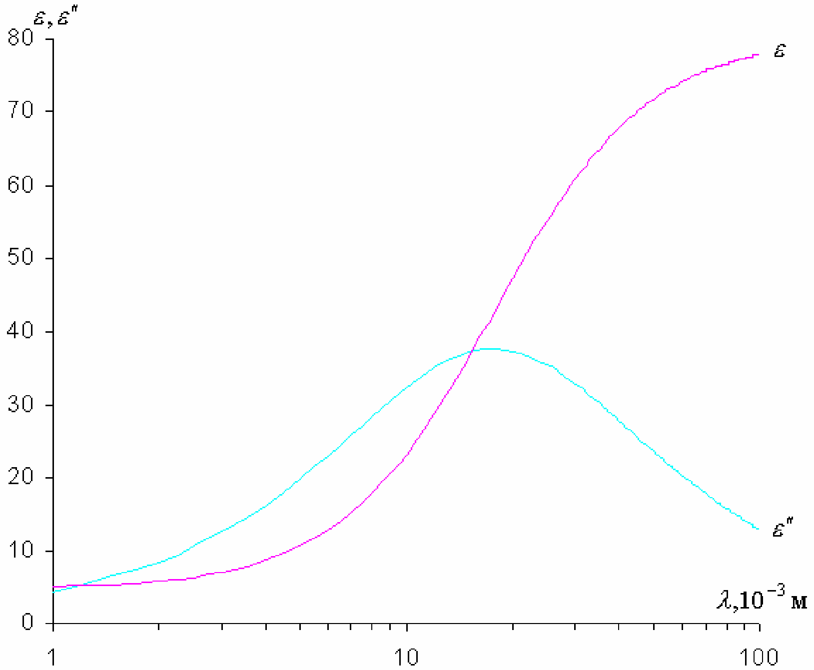

Рис.3.2. Зависимость диэлектрической проницаемости воды от длины волны, рассчитанная по (3.9)–(3.10) для дистиллированной воды

На рис.3.2 приведены кривые зависимости от длины волны λ в мм действительной ε и мнимой ε'' составляющей диэлектрической проницаемости пресной дистиллированной воды при температуре 20°

С, вычисленные по соотношению (3.9) теории Дебая при $\tau = 9{,}35 \cdot 10^{-12}$ с, $\varepsilon_{\infty} = 4{,}9$, $\varepsilon_{=} = 80{,}1$.

Из данных на рис.3.2 следует, что существует экстремум (релаксационный максимум) мнимой составляющей на $\lambda_{+} = 17.6 \cdot 10^{-3}$ м ($f_{+} = \dfrac{c}{\lambda_{+}} = \dfrac{2.997 \cdot 10^{11}}{17.6} = 17$ ГГц), для $\lambda = 8 \cdot 10^{-3}$ м., $\varepsilon = 17.8$, а $\varepsilon'' = 28.3$.

В интервалах длин волн вне экстремальной λ_{+} мнимые составляющие уменьшаются для пресной воды. Для морской воды из-за солености ($\sigma_S \neq 0$) мнимая составляющая ε'' с увеличением длины волны λ (понижением частоты $\omega / 2\pi$) возрастает. Действительная составляющая ε является монотонно убывающей функцией с укорочением длины волны (повышением частоты $\omega / 2\pi$).

3.3. Влажные почвогрунты

В [4] приведены экспериментальные данные о действительной и мнимой составляющих диэлектрической проницаемости пяти типов почв (смеси из песка (П), глины (Г) или органических удобрений (Ил)) в диапазоне частот (4 – 38) ГГц в зависимости от объемной ρ_m [г/см^3] и весовой [%] влажности.

По корреляционному полю измеренных составляющих $\varepsilon_Э$, $\varepsilon''_Э$ пяти эталонных типов почв и теоретических значений $\varepsilon_T, \varepsilon''_T$ прямые регрессии ε_T на $\varepsilon_Э$ соответствуют коэффициентам взаимной корреляции $R_{ЭT} = 0{,}98$ при значении в (3.3) аппроксимационного показателя степени $q = 0{,}65$, и незначительно зависящего от относительного весового содержания в грунте песка, глины, составляющих в совокупности с органическими удобрениями 100% [4].

В [Д1] на лучеводной измерительной линии были измерены на частоте 140 ГГц ($\lambda = 2{,}14 \cdot 10^{-3}$ м) комплексные диэлектрические проницаемости грунта, песка, стекла, асфальта, бетона, обожженного (красного) и силикатного кирпичей, сосновой доски, снега с контролем плотности ρ и температур исследуемых образцов. Например, у сухого песка с $\rho = 1{,}4$ г/см^3 экспериментальные значения $\varepsilon_Э, \varepsilon''_Э$ оказались равными: $\varepsilon'_Э = 2{,}5 + i6{,}2 \cdot 10^{-2}$.

Для измеренного $\rho = 1{,}4$ г/см^3 и эталонного значения $\rho_r = 2{,}65$ г/см^3, порозности $p = 1 - \dfrac{\rho}{\rho_r} = 0{,}48$, $\varepsilon_r = 4{,}73$ при $q = 0{,}65$ по соотношению (3.7) получилась теоретическая оценка $\varepsilon_T = \varepsilon = 2{,}52$, что в пределах 1% совпадает с измеренным [6].

В неидеальных твердых диэлектриках ($\varepsilon'' \neq 0$) из-за релаксации возникают диэлектрические потери и мнимая составляющая на несколько порядков меньше составляющей, обусловленной токами проводимости [3,4].

На рис.3.3 приведены рассчитанные по (3.9) составляющие КДП почвы как функции объемной влажности ρ_m на длинах волн $\lambda = 8$ мм и 15 см при порозности $p = 0{,}5$, температуре $t = 20°$C, 51% песка, 13,5% глины и 35,5% ила.

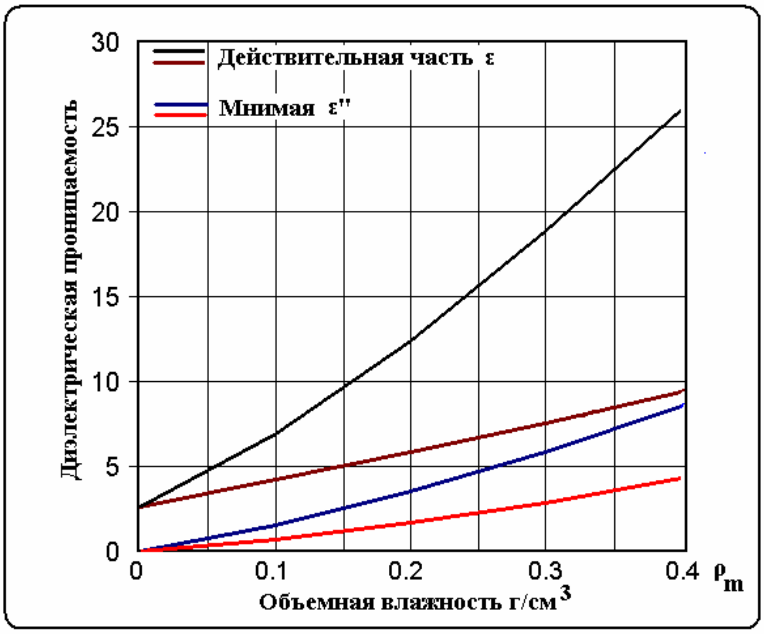

Рис.3.3. Зависимости КДП грунта (песок 51%, глина 13,5%, ил 35,5%): кривые черного и красного цвета – на частоте $\omega/2\pi$ = 2 GHz, кривые бордового и голубого цвета – на частоте $\omega/2\pi$ = 37,5 GHz

Из анализа частотных зависимостей ε, ε'' на рис.3.2 следует, что действительная составляющая диэлектрической проницаемости почвы ε на частоте 2 ГГц ($\lambda = 15$ см) от объёмной влажности должна превышать аналогичную зависимость на частоте 37,5 ГГц ($\lambda = 0{,}8$ см), а мнимая составляющая ε'' – наоборот.

С увеличением объемной влажности возрастают действительная и мнимая составляющие комплексной диэлектрической проницаемости влажной почвы, что и подтверждается расчётными кривыми на рис.3.3.

4. Отражение, преломление и поглощение гладким подстилающим покровом линейно поляризованной плоской волны

В общем виде вектор напряженности электрического поля $\vec{E}(\vec{r},t)$ плоской гармонической волны как функция времени t и координат пространства $\vec{r}(x,y,z)$ в воздухе $(\varepsilon'=1)$ [1] записывается в виде:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = E(x,y,z)\,\vec{p}\exp\left(\mathrm{i}\left[(\vec{k}\vec{r}) - \omega t\right]\right) =$$
$$= E(x,y,z)\vec{p}\exp[\mathrm{i}(\vec{k}\vec{r})]\exp(-\mathrm{i}\omega t), \qquad (4.1)$$

где $\vec{p}$ – единичный вектор поляризации.

Временной множитель обычно опускают и анализируют комплексную амплитуду волны $E(x,y,z)\exp[\mathrm{i}(\vec{k}\vec{r})] = E(x,y,z)\exp[\mathrm{i}\varphi_E(r)]$. Как комплексную функцию её выражают через модуль (амплитуду $E(x,y,z)$) и аргумент $\varphi_E(r)$ (фазу) волны, являющиеся действительными функциями расстояния r от источника до точки наблюдения; t - время отсчета от начала наблюдения ($t = 0$).

Отражение, преломление и поглощение обычно рассматривают по схеме, изображённой на рис.4.1.

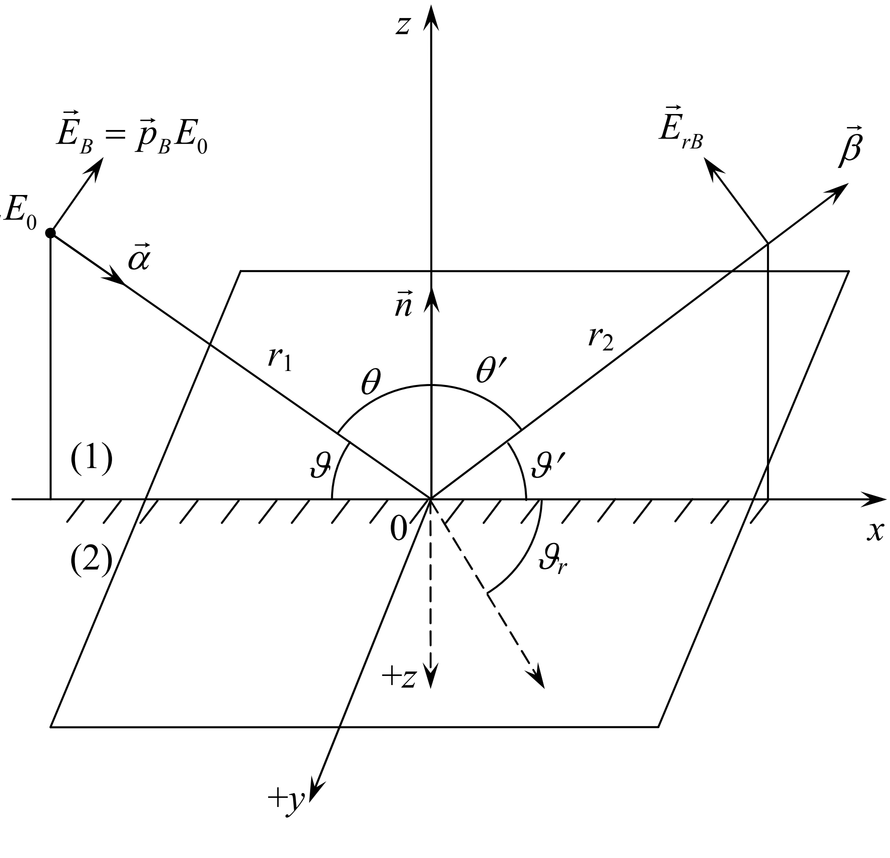

Рис.4.1. Геометрическая схема отражения и преломления плоской волны границы (1) и (2) сред

Поверхность раздела двух сред (1) и (2) на рис.4.1 совпадает с координатной плоскостью $x0y$.

В дальнейшем будут использованы полуплоскости $x0z$, как плоскость падения, отражения и полуплоскости (x,0,+z) преломления в правой системе координат для вертикально и горизонтально линейно-поляризованных волн.

На рис.4.1 обозначено: $\vec{p} = (\vec{p}_В + \vec{p}_Г)$ – единичный вектор ($|\vec{p}| = 1$) произвольной левой эллиптической поляризации с линейными горизонтальной $\vec{p}_Г$ и вертикальной $\vec{p}_В$ составляющими; $\vec{k} = \dfrac{2\pi\vec{\alpha}}{\lambda}$ - волновой вектор, характеризуемый единичным вектором $|\vec{\alpha}| = 1$ направление $\vec{\alpha}$ падающей на покров плоской электромагнитной волны. В плоскости $x0z$ компоненты единичного вектора $\vec{\alpha} = (\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z) = \vec{\alpha}(\cos\vartheta, 0, -\sin\vartheta)$ вертикальной линейно-поляризованной волны, ϑ, ϑ' - углы скольжения и места (возвышения), θ, θ' - падения и отражения; $\vec{\beta}$ - единичный вектор $|\vec{\beta}| = 1$ направления отражения при с компонентами $\vec{\beta} = (\beta_x, \beta_y, \beta_z) = \vec{\beta}(\cos\vartheta', 0, \sin\vartheta')$.

Для оценки преломления и поглощения покровом выберем направление падения волны из среды (1) в среду (2) с положительным направлением оси z вниз.

Соотношения между углами падения θ и отражения θ', скольжения ϑ' и преломления (refraction) ϑ_r, а также выражения для коэффициентов отражения плоской волны с эллиптической поляризацией выведены в [4.2] с использованием граничных условий.

С учётом отражения $\vec{E}_r$ полное поле в первой среде $\vec{E}_1 = \vec{E} + \vec{E}_r$, а во второй среде $\vec{E}_2$.

Компоненты волнового вектора $\vec{k}$ с направляющими косинусами относительно осей $0x$, $0z$ в средах (1) и (2) как следует из рис.4.1 можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} &k_x = k_1\cos\vartheta, \quad k_{xr} = k_1\cos\vartheta', \quad k_{xw} = k_2\cos\vartheta_r, \quad k_1 = k\sqrt{\varepsilon_1'} \\ &k_z = -k_1\sin\vartheta, \quad k_{zr} = k_1\sin\vartheta', \quad k_{zw} = -k_2\cos\vartheta_r, \quad k_2 = k\sqrt{\varepsilon_2'} \end{aligned}\right\} \qquad (4.2)$$

Для фазового множителя комплексной амплитуды линейной горизонтально-поляризованной волны $E_y = E_0\exp[i(\vec{k}\vec{r})]$ составляющей E_y полного поля с введением коэффициента отражения $V_Г = E_r/E_0$ в среде (1) с учётом коэффициента прохождения $W_Г$ волны в среду (2) из (2.2τ) следует соотношение

$$\exp(ik_1x\cos\vartheta) + V_Г\exp(k_1x\cos\vartheta') = W_Г\exp(k_2\cos\vartheta_r). \qquad (4.3)$$

Для составляющих $H_{1\tau}$ и $H_{2\tau}$ из условий (2.2$'\tau$) и (2.3$'n$) получаются соответственно выражения:

$$\left.\begin{aligned}&-k_1\sin\vartheta\exp(ik_1x\cos\vartheta)+k_1\sin\vartheta' V_Г\exp(k_1x\cos\vartheta)=\\&\qquad=-k_2\sin\vartheta_r W_Г\exp(k_2x\cos\vartheta_r);\\&k_1\cos\vartheta\exp(ik_1x\cos\vartheta)+k_1\cos\vartheta' V_Г\exp(k_1x\cos\vartheta)=\\&\qquad=k_2\cos\vartheta_r W_Г\exp(k_2x\cos\vartheta_r).\end{aligned}\right\}\qquad(4.4)$$

Соотношения (4.3) и (4.4) удовлетворяют граничным условиям ($2.2'\tau$) и ($2.3n$) только при условии $k_1\cos\vartheta = k_1\cos\vartheta' = k_2\cos\vartheta_r$.

Это возможно в ситуации, когда угол места $\vartheta' = \vartheta$ углу скольжения (или угол отражения $\theta' = \theta$ – углу падения – закон Снеллиуса) и при соблюдении этого закона $k_1\cos\vartheta = k_2\cos\vartheta_r$, т.е. $k\sqrt{\varepsilon_1'}\cos\vartheta = k\sqrt{\varepsilon_2'}\cos\vartheta_r$ или

$$\cos\vartheta = n'\cos\vartheta_r,\qquad(4.5)$$

где $n' = \sqrt{\varepsilon_2'/\varepsilon_1'}$.

Для границы раздела воздух-покров $\varepsilon_1' = 1$, и, следовательно, всегда $n' > 1$, то равенство (4.5) выполняется, если угол преломления ϑ_r в такой среде всегда больше угла скольжения ϑ, т.е. преломлённая волна «прижимается» к оси z, поэтому величину «n» и называют показателем преломления волны (среды).

В ситуации сред воздух-диэлектрик $\varepsilon_1' = 1$ и $n' = \sqrt{\varepsilon_2'}$ при $\vartheta' = \vartheta$ и $\cos\vartheta = n'\cos\vartheta_r$ из соотношений (4.3) и (4.4) получаются два независимых уравнения

$$\begin{gathered}1 + V_Г = W_Г;\\ k_1\sin\vartheta\cdot(1 - V_Г) = k_2\sin\vartheta_r\cdot W_Г = k_2\sqrt{1 - \frac{\cos^2\vartheta}{n'^2}}(1 + V_Г).\end{gathered}\qquad(4.6)$$

Из соотношения (4.6) получается выражение

$$V_Г(\varepsilon',\vartheta) = \frac{E_r}{E} = \frac{k_1\sin\vartheta + k_2\sin\vartheta_r}{k_1\sin\vartheta - k_2\sin\vartheta_r} = \frac{\sin\vartheta - \sqrt{\varepsilon' - \cos^2\vartheta}}{\sin\vartheta + \sqrt{\varepsilon' - \cos^2\vartheta}}.\qquad(4.7)$$

Аналогично выводится выражение и для вертикальной поляризации

$$V_B(\varepsilon',\vartheta) = \frac{\varepsilon'\sin\vartheta - \sqrt{\varepsilon' - \cos^2\vartheta}}{\varepsilon'\sin\vartheta + \sqrt{\varepsilon' - \cos^2\vartheta}}.\qquad(4.8)$$

Комплексная амплитуда вертикально падающей плоской горизонтально поляризованной электромагнитной волны θ=0 составляющей $\dot{E}_{2x}(z)$ волны, прошедшей из среды (1) в среду (2) в положительном направлении вниз оси z (пунктир), как следует из (4.1) записывается в виде:

$$E_{2x} = E_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'z} = E_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\sqrt{\varepsilon'}z} = E_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}knz}\mathrm{e}^{-kmz}\,. \tag{4.9}$$

В (4.9) обозначено:

$$k' = k\sqrt{\varepsilon'} = kn + \mathrm{i}km,$$

где

$$\sqrt{\varepsilon'} = n' = n + \mathrm{i}m. \tag{4.10}$$

Из выражения (4.9) следует, что "m" - показатель поглощения амплитуды на длине волны λ.

Из соотношений (3.2) и (4.10) следует

$$\left.\begin{matrix} n \\ m \end{matrix}\right\} = \sqrt{|\varepsilon'|}\begin{cases} \cos\dfrac{\delta}{2}, \\ \sin\dfrac{\delta}{2}. \end{cases} \tag{4.11}$$

В отличие от воздуха (среда (1)), где $k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{\omega}{c}$, в подстилающем покрове (среда (2)) волновое число распространяющейся волны возрастает в "n" раз, т.е.

$$kn = \frac{2\pi}{\lambda/n} = \frac{\omega}{c/n} = \frac{\omega}{c\Big/\sqrt{|\varepsilon'|}\cos\delta/2} = \frac{\omega}{c_\Phi}, \tag{4.12}$$

где

$$c_\Phi = \frac{c}{\sqrt{|\varepsilon'|}\cos\delta/2} \tag{4.13}$$

– фазовая скорость в среде (2).

Из соотношения (4.12) следует, что в среде с $n = \sqrt{|\varepsilon'|}\cos\delta/2$ длина волны укорачивается в n раз по сравнению с воздухом (n = 1). Это ясно и из такого физического представления. Скорость распространения волны – фазовая скорость c_Φ (4.13) в среде меньше, чем в воздухе (вакууме), так что при одинаковой частоте ω (временной период T=$2\pi/\omega$) длина волны λ (пространственный цикл) в среде меньше чем в вакууме.

На рис.4.2 приведены зависимости показателя преломления $n = n\left(\lambda, \dfrac{\omega}{2\pi}\right)$ и поглощения $m = m\left(\lambda, \dfrac{\omega}{2\pi}\right)$ дистиллированной воды при $t = 20°\,\mathrm{C}$, вычисленные по соотношениям (4.11) с использованием данных для кривых на рис.4.2, рассчитанных по формулам Дебая (3.3) и (3.4). Сплошные линии - расчет, крестики - обобщенные экспериментальные данные [6].

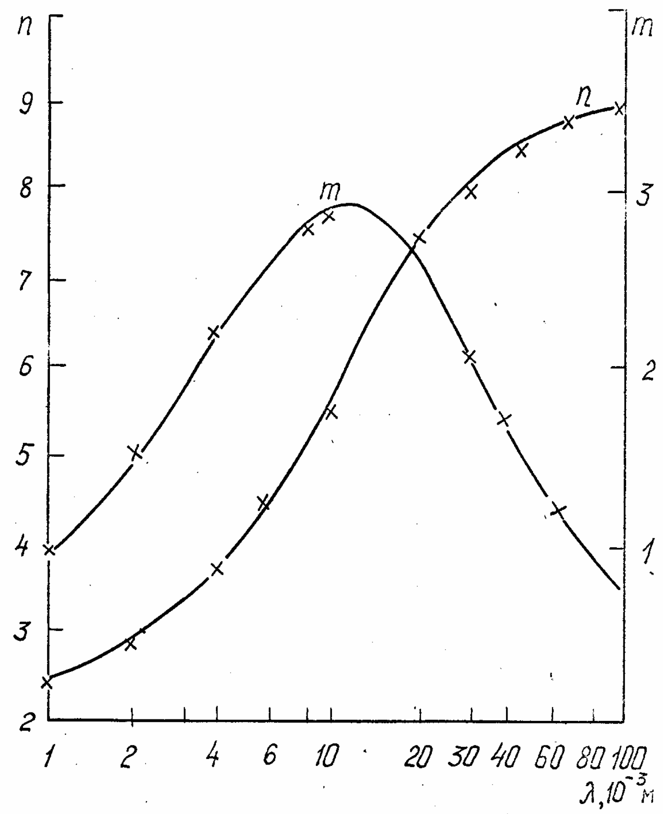

Рис.4.2. Зависимости показателя преломления “*n*” и поглощения “*m*” дистиллированной воды при *t*=20°. Сплошные линии - расчет, крестики - обобщенные экспериментальные данные [6]

Составляющая интенсивности $I_z = E_{2z}E_{2z}^*$ прошедшей в подстилающий покров плоской электромагнитной волны (4.9) записывается в виде:

$$I_z = |E_z|^2 \, \mathrm{e}^{-2kmz} = I_2 \, \mathrm{e}^{-\alpha z}, \qquad (4.14)$$

где α =2*km* - коэффициент поглощения интенсивности.

Часто пользуются удельным коэффициентом поглощения γ в дБ на единицу пути прохождения [дБ/*z*] выражение, которое получается из (4.14) путём преобразования выражения $\frac{I_2}{I_z} = \mathrm{e}^{\alpha_z}$ в $10\lg\frac{I_2}{I_z} = \alpha_z 10\lg\mathrm{e} = 4{,}34\alpha z = \Gamma = \gamma z$, откуда

$$\gamma = 4.34\alpha = 8.68km = 8.68 \cdot 2\pi\frac{m}{\lambda} = 54.5\frac{m}{\lambda}[\text{дБ/z}]. \qquad (4.15)$$

Проникновение поля на глубину подстилающего покрова - толщину скин-слоя – z_e оценивается по уровню уменьшения поля в $\mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}367$ раз, а интенсивность в $\mathrm{e}^{-2} = 0{,}13$ раза.

Как следует из (4.9) это соответствует условию:

$$kmz_e = 1. \qquad (4.16)$$

Из (4.15) и (4.16) получается выражение для глубины проникновения поля в подстилающий покров в виде:

$$z_e = \frac{1}{km} = \frac{\lambda}{2\pi m} = \frac{8{,}68}{\gamma}. \qquad (4.17)$$

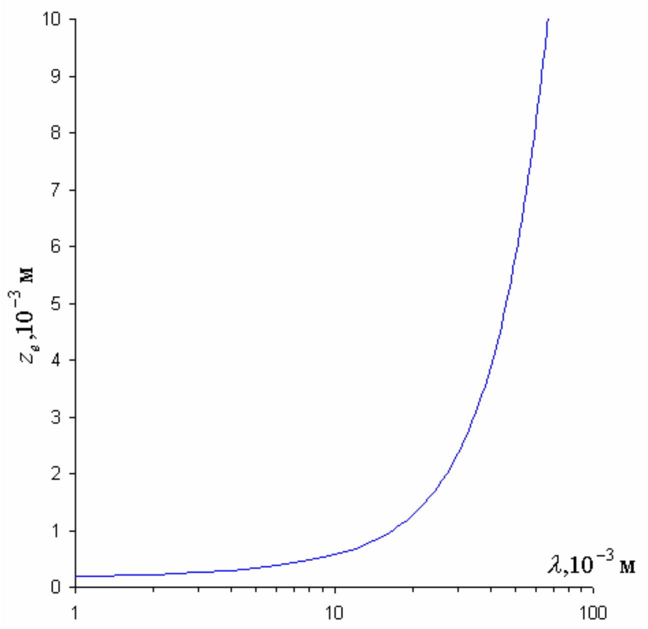

Рис.4.3. Зависимость толщины скин-слоя пресной воды от длины волны, t=20°С

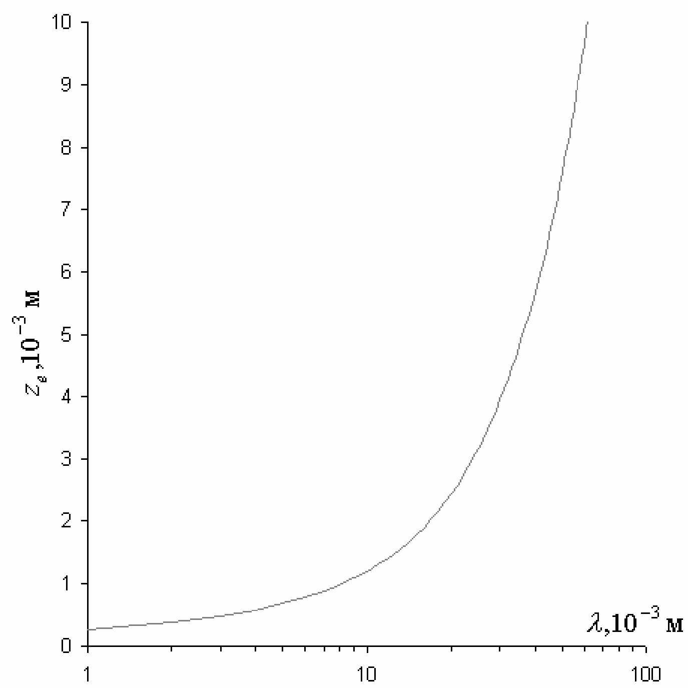

Рис.4.4. Зависимость толщины скин-слоя почвогрунта от длины волны (ПГИ): {*П* – 51,3%; *Г* – 13,5%; *Ил* – 36%}=100%

На рис.4.3 приведены зависимости глубины проникновения z_e в пресную воду, а на рис.4.4 - в подстилающий покров грунта волн миллиметрового диапазона.

Из анализа кривых на рис.4.2 следует, что у воды m=2,64 для значений $\lambda = 8\cdot 10^{-3}$ м $(\gamma = 19$ дБ/мм$)$, при этом глубина проникновения на толщину скин-слоя $z_e \approx 0.49\cdot 10^{-3}$ м. Учитывая, что при n=4,9 в воде длина волны $\lambda_2 = \frac{\lambda_1}{n} = \frac{8\cdot 10^{-3}\text{ м}}{5} \approx 1.6\cdot 10^{-3}$ м укорачивается более чем в 5 раз, то практически даже в пресную воду ММВ не проникают. Только при температуре воды 50°С ослабляются силы поверхностного натяжения и ММВ проникают несколько глубже.

Аналогичная ситуация с влажным песком. У влажного песка $(\rho_m = 0.2\text{ г/м}^3)$ на $\lambda = 8\cdot 10^{-3}$ м $(\varepsilon' = 5.3 + \mathrm{i}2.7)$, с учетом диэлектрических потерь), $\sqrt{|\varepsilon'|} \approx 2.43$, $\frac{\delta}{2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\varepsilon''}{\varepsilon} = 13.5°$, $\cos\frac{\delta}{2} = 0.97$, $n = 2.36$, $\gamma = 3.8$ дБ/мм, $z_e = 2{,}3\cdot 10^{-3}$ м , толщина скин-слоя $z_e \approx 0.7\lambda_2$. Глубины проникновения в воду и влажный песок по порядку величины примерно одинаковы с пресной водой.

У сухого песка на $\lambda = 2\cdot 10^{-3}$ м $(\varepsilon' = 2.5 + \mathrm{i}6.2\cdot 10^{-2})$, $n \approx \sqrt{\varepsilon} = 1.58$, $m = 1.95\cdot 10^{-2}$, $(\gamma = 0.53$ дБ/мм$)$, $z_e \approx 16.2\cdot 10^{-3}$ м, что соответствует $z_e = 13\lambda_2$.

Рассмотрим особенности коэффициента отражения волны с вертикальной поляризацией границей непоглощающей среды ($\varepsilon'' = 0$, $\varepsilon' = \varepsilon$). Из соотношения (4.8) следует, что числитель обращается в нуль при условии:

$$\varepsilon \sin\vartheta_0 - \sqrt{\varepsilon - \cos^2\vartheta_0} = 0,$$

которое преобразуется в равенство

$$\varepsilon^2 \sin^2\vartheta_0 = \varepsilon - 1 + \sin^2\vartheta_0.$$

После объединения $\sin^2\vartheta_0$ получается:

$$(\varepsilon^2 - 1)\sin^2\vartheta_0 = \varepsilon - 1, \text{ откуда } \sin\vartheta_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon + 1}}.$$

Поскольку

$$\cos\vartheta_0 = \sqrt{1 - \sin^2\vartheta_0} = \sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon + 1}} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon + 1}},$$

то

$$\operatorname{tg}\vartheta_0 = \frac{\sin\vartheta_0}{\cos\vartheta_0} = \frac{\sqrt{\varepsilon+1}}{\sqrt{\varepsilon+1}\sqrt{\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{1}{n}. \qquad (4.18)$$

Из соотношения (4.19) следует, что для непоглощающего покрова скользящий угол отражения

$$\vartheta_0 = \operatorname{arctg}\frac{1}{n}. \qquad (4.19)$$

Для сухого песка $\varepsilon' = 2{,}5 + i6{,}2 \cdot 10^{-2}, n = 1{,}58$ по соотношению (4.19) получается $\vartheta_0 \approx 32°$.

Через модуль (амплитуду) $|V|$ и аргумент (фазу) φ_V соотношения (4.7) и (4.8) записываются в виде:

$$V(\vartheta,\varepsilon') = \left|V(\vartheta,\varepsilon')\right| e^{i\varphi_V(\vartheta,\varepsilon')}. \qquad (4.20)$$

На рис.4.5 приведены зависимости от ϑ и ε' модулей френелевских коэффициентов отражения воды и сухого песка. Пунктир - обозначает горизонтальную поляризацию, сплошная - вертикальная. 1 – $\lambda = 8 \cdot 10^{-3}$ м, 2 – $\lambda = 2 \cdot 10^{-3}$ м, 3 – сухого песка.

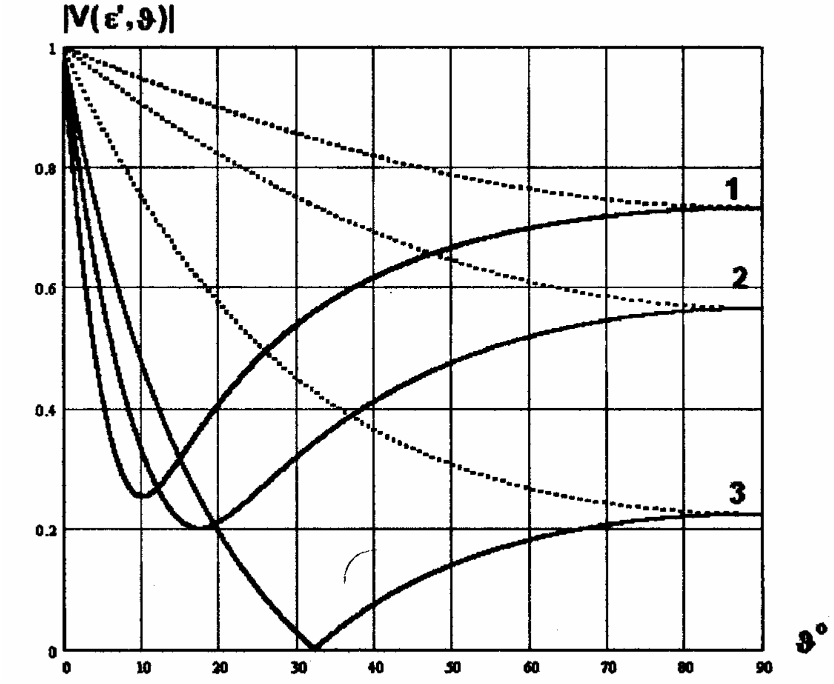

Рис.4.5. Зависимости от ϑ и ε' модулей френелевских коэффициентов отражения воды и сухого песка. Пунктир – горизонтальная поляризация, сплошная - вертикальная. 1 – λ=8·10^{-3} м, 2 – λ=2·10^{-3} м, 3 – сухого песка

На рис.4.6 представлены соответствующие рис.4.2 зависимости изменения фазы.

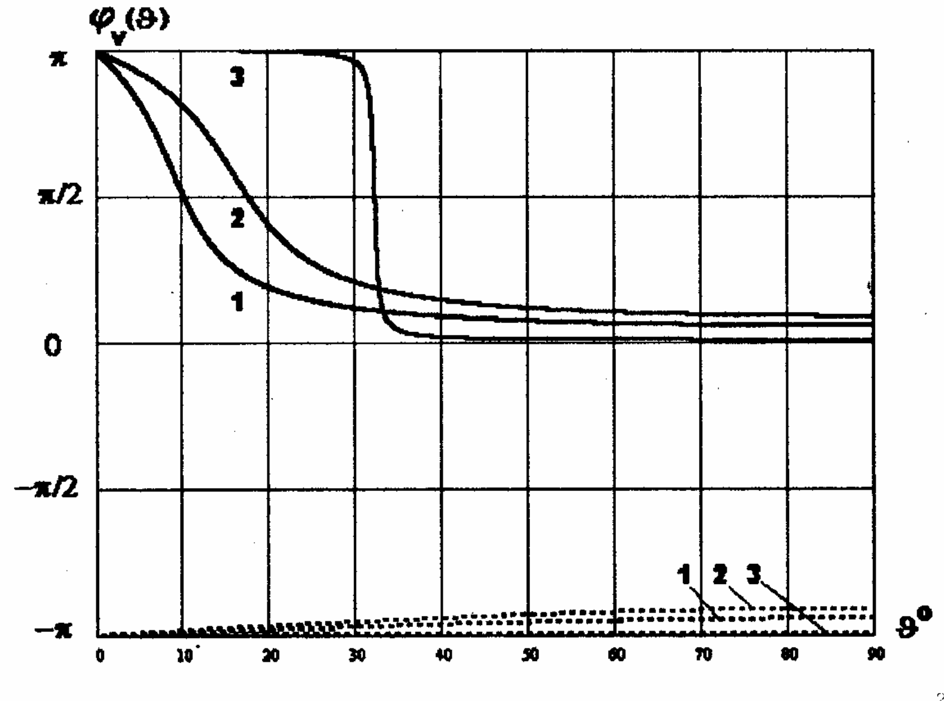

Рис.4.6. Зависимости от ϑ и ε' фазы френелевских коэффициентов отражения воды и сухого песка. Пунктир – горизонтальная поляризация, сплошная - вертикальная. 1 – λ=8·10^{-3} м, 2 – λ=2·10^{-3} м, 3 – сухого песка

Из данных на рис.4.5 и рис.4.6 следует, что отраженная непоглощающим покровом $(m = 0)$ горизонтально поляризованная волна запаздывает по фазе на π практически во всем интервале углов $0°–90°$, от скольжения $(\vartheta = 0°)$, до вертикального падения $(\vartheta = 90°)$. Тогда как отраженная вертикально поляризованная волна до значения угла Брюстера ($\vartheta_0 = 32°$) опережает по фазе на π и только при угле Брюстера происходит скачок изменения фазы на π с сохранением до его угла скольжения $(\vartheta = 0°)$.

5. Составляющие комплексной амплитуды плоской волны, отраженной гладким земным покровом

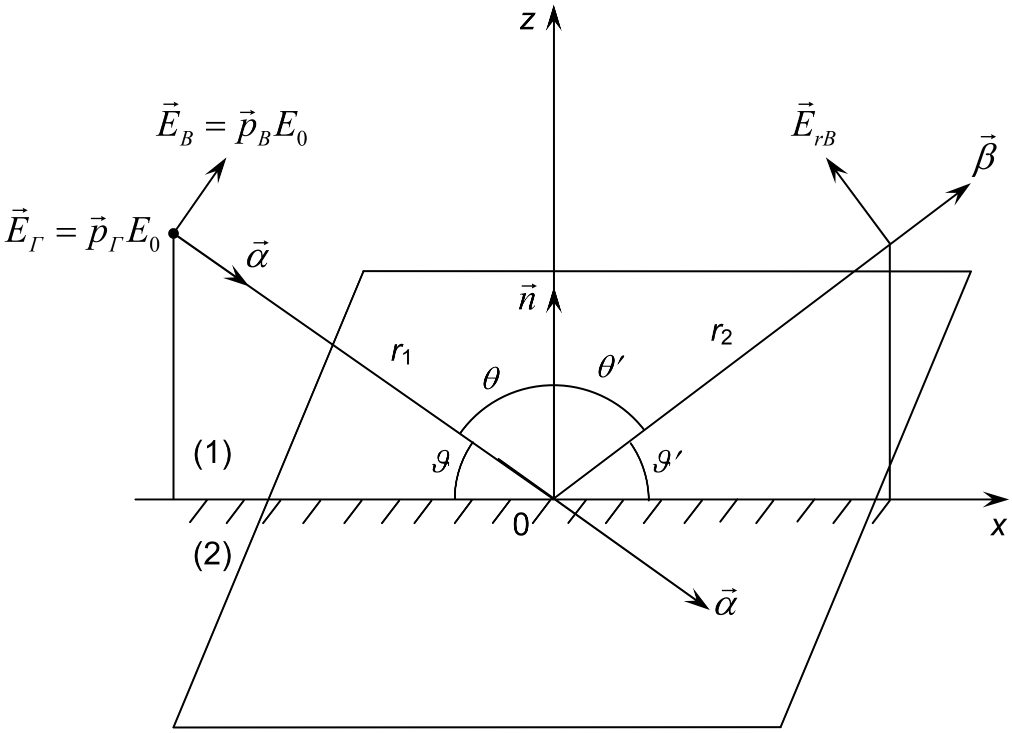

Рис.5.1. Геометрическая схема отражения плоской волны

Для установления зависимостей составляющих отраженного поля E_{ri} от составляющих падающей на гладкий покров плоской волны с произвольной поляризацией по геометрической схеме рис.5.1 целесообразно падающую $\vec{E} = \vec{E}\,(E_1, E_2, E_3) = \vec{E}\,(E_x, E_y, E_z)$ и отраженную $\vec{E}_r = \vec{E}_r\,(E_{r1}, E_{r2}, E_{r3})$ волны описывать в базисе углов единичных векторов нормали в верхнем полупространстве

$$\vec{n} = \vec{n}(n_1, n_2, n_3) = \vec{n}(n_x, n_y, n_z) = \vec{n}(0,0,1) \tag{5.1}$$

и составляющих направления падения $\vec{\alpha}$ в виде составляющих $\cos\vartheta$ и $-\sin\vartheta$

$$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \vec{\alpha}(\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z) = \vec{\alpha}(\cos\vartheta, 0, -\sin\vartheta). \tag{5.2}$$

Аналогично, составляющие падающей волны записываются в виде

$$\vec{E}_{B,\Gamma} = \vec{E}(E_x^{B,\Gamma}, E_y^{B,\Gamma}, E_z^{B,\Gamma}), \text{ где}$$

$$E_x^B = Ep_x^B = E\cos\vartheta,\ E_y^B = 0,\ E_z^B = E\sin\vartheta,$$

$$E_x^\Gamma = E,\ E_y^\Gamma = E_z^\Gamma = 0.$$

При этом волны с произвольной поляризацией $\vec{E}$ и $\vec{E}_r$ представляются как суммы волн с ортогональными составляющими горизонтальной $\vec{E}_Г$ и вертикальной $\vec{E}_B$ поляризациями в виде

$$\left.\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_B + \vec{E}_Г = E\vec{p}_B + E\vec{p}_Г, \\ \vec{E}_r &= \vec{E}_{rB} + \vec{E}_{rГ} = E_r\vec{p}_B + E_r\vec{p}_Г, \end{aligned}\right\}. \tag{5.3}$$

В результате векторных преобразований получается выражение

$$\vec{E}_r = V_Г\vec{E} - \frac{(\vec{E}\vec{n})}{\cos^2\vartheta}\left\{\left(V_Г - V_B\cos 2\vartheta\right)\vec{n} + \sin\vartheta(V_Г + V_B)\vec{\alpha}\right\}, \tag{5.4}$$

где ϑ - угол скольжения падающей волны.

Аналогичное выражение получается и для отражённой комплексной амплитуды магнитного поля $\vec{H}_r$ с очевидной заменой в (5.4) в множителе перед $\vec{n}$ коэффициентов отражения $V_Г$ на V_B и V_B на $V_Г$.

Соотношение для преломлённых волн в поглощающей среде имеет аналогичный (5.4) вид с заменой коэффициентов отражения $V_Г$ и V_B на соответствующие коэффициенты прохождения и учёта комплексного показателя преломления волны n_2' в поглощающей второй среде.

Заметим, что по определению, скалярное произведение $\vec{E}$ и $\vec{n}$ в (5.4) записывается в виде суммы произведений их составляющих

$$\left(\vec{E}\vec{n}\right) = \sum_{j=1}^{3} E_j n_j = E_1 n_1 + E_2 n_2 + E_3 n_3. \tag{5.5}$$

Из соотношений (5.4) и (5.5) следует, что составляющие вектора $\vec{E}_r$ отраженной волны в прямоугольной системе координат являются линейной функцией составляющих векторов падающей волны $\vec{E}$ и соответствующих составляющих V=V(V_B, $V_Г$) френелевских коэффициентов отражения. Для получения этой функции в компактной форме целесообразно i-ые составляющие $\vec{E}$ записать через символы δ_{ij} Кронекера

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{при}\, i = j, \\ 0, \text{при}\, i \neq j. \end{cases} \tag{5.6}$$

в виде

$$E_i = \delta_{ij} E_j, \tag{5.7}$$

где для i-ой составляющей осуществляется суммирование по $j = 1,2,3$.

После подстановки (5.6) и (5.7) в (5.4) для i-ой составляющей отраженного поля получается выражение:

$$\vec{E}_{ri} = V_Г \delta_{ij} E_j - \frac{1}{\cos^2 \vartheta} \sum_{j=1}^{3} E_j n_j \left\{ \left(V_Г - V_В \cos 2\vartheta \right) n_i + \sin\vartheta (V_Г + V_В) \alpha_i \right\}$$

После вынесения E_j за фигурную скобку, перемножения n_j и n_i, n_j и α_i выражения E_{ri} преобразуется к виду

$$E_{ri} = \left\{ \begin{aligned} & V_Г \delta_{ij} - \frac{1}{\cos^2 \vartheta} \times \\ & \times \sum_{j=1}^{3} \left[\left(V_Г - V_В \cos 2\vartheta \right) n_i n_j + \sin\vartheta (V_Г + V_В) \alpha_i n_j \right] \end{aligned} \right\} E_j. \quad (5.8)$$

Выражение в фигурной скобке (5.8) обозначим через комплексную функцию

$$T_{ij} = V_Г \delta_{ij} - \frac{1}{\cos^2 \vartheta} \sum_{j=1}^{3} \left[\left(V_Г - V_В \cos 2\vartheta \right) n_i n_j + \sin\vartheta (V_Г + V_В) \alpha_i n_j \right]. \quad (5.9)$$

С использованием обозначения T_{ij} (5.9) соотношение (5.8) записывается в форме

$$E_{ri} = \sum_{j=1}^{3} T_{ij} E_j. \quad (5.10)$$

Раскрытое выражение (5.10) в форме матрицы преобразования T_{ij} составляющих E_1, E_2, E_3 падающей волны в составляющие E_{r1}, E_{r2}, E_{r3} отраженной волны записывается в виде

$$\begin{aligned} E_{r1} &= T_{11} E_1 + T_{12} E_2 + T_{13} E_3; \\ E_{r2} &= T_{21} E_1 + T_{22} E_2 + T_{23} E_3; \\ E_{r3} &= T_{31} E_1 + T_{32} E_2 + T_{33} E_3. \end{aligned} \quad (5.11)$$

По определению матрица T_{ij} является тензором второго ранга. Часто для краткости знак $\sum_{j=1}^{3}$ суммирования по повторяющемуся индексу ($j = 1,2,3$) в строках опускают и выражение (5.10) записывают в компактной форме

$$E_{ri} = T_{ij} E_j. \quad (5.12)$$

Для определения элементов матрицы T_{ij} согласно (5.9) требуются элементы δ_{ij}, произведений $n_i n_j$ и $\alpha_i n_{ij}$. В [5.1] из соотношения (5.9) с использованием расписанных по строкам (столбцам) символов Кронекера δ_{ij}, нормалей $n_i n_j$, направления падения и нормали $\alpha_i n_j$ получены элементы тензора отражения T_{ij} в виде

$$T_{ij} = \begin{Bmatrix} V_\Gamma & 0 & -\operatorname{tg}\vartheta(V_\Gamma + V_B) \\ 0 & V_\Gamma & 0 \\ 0 & 0 & V_B \end{Bmatrix}. \qquad (5.13)$$

В качестве примера рассмотрим составляющие E_{rx}, E_{ry}, E_{rz} отраженной волны при падении только линейной вертикально поляризованной плоской волны $\vec{E}_B = E\vec{p}_B = \vec{E}(E\sin\vartheta, 0, E\cos\vartheta) = \vec{E}(E_1, E_2, E_3)$. Из соотношений (5.11) и (5.13) получается

$$\left.\begin{aligned} E_{rx}^B &= T_{11}E_1^B + T_{13}E_3^B = V_B E\sin\vartheta, \\ E_{ry}^B &= 0, \\ E_{rz}^B &= V_B E\cos\vartheta. \end{aligned}\right\} \qquad (5.14)$$

Из выражений (5.14) следует, что составляющие E_{rx}, E_{ry} отраженной волны содержат только составляющие вертикально поляризованной волны и в качестве множителя комплексные френелевские коэффициенты отражения волны с вертикальной поляризацией.

При падении волны с горизонтальной поляризацией $\vec{E}_\Gamma = \vec{E}(0, E_\Gamma, 0)$ компоненты отраженной волны записываются в виде

$$\left.\begin{aligned} E_{rx} &= 0, \\ E_{ry} &= T_{22}E_2 = V_\Gamma E_\Gamma, \\ E_{rz} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (5.15)$$

Из рассмотренных примеров следует, что при отражении волны плоской границей раздела в плоскости $x0z$ деполяризация волн отсутствует. Составляющие с вертикальной и горизонтальной поляризацией отраженного поля $E_{rx,z}$ выражаются как произведение френелевских коэффициентов отражения и соответствующей поляризационной составляющей падающего поля, в отличие от выпуклых границ раздела правильной формы (шар, цилиндр и т.п.).

6. Френелевские зоны излучения апертурных антенн с круговым раскрывом

Математические задачи излучения круговой апертурной антенны с радиусом ρ_0 и дифракции на круглом радиопрозрачном отверстии в экране во френелевском (малоугловом) приближении в предположении Кирхгофа адекватны [].

Исторически сложилось так, что явление дифракции света на круглом отверстии в экране было изучено теоретически и экспериментально ещё в XIX веке многими учёными.

Поэтому неудивительно, что в теории излучения антенн ММВ пользуются терминами: зоны Френеля на апертуре антенны (отверстии) – перпендикулярные направлению распространения, а также зоны наблюдения (приёма) излучения антенны (дифракции на отверстии) Френеля и Фраунгофера, выделенные вдоль направления распространения излучения по оси x.

Излучение антенны и распространение пучка в свободном пространстве будем рассматривать по геометрической схеме, представленной на рис.6.1.

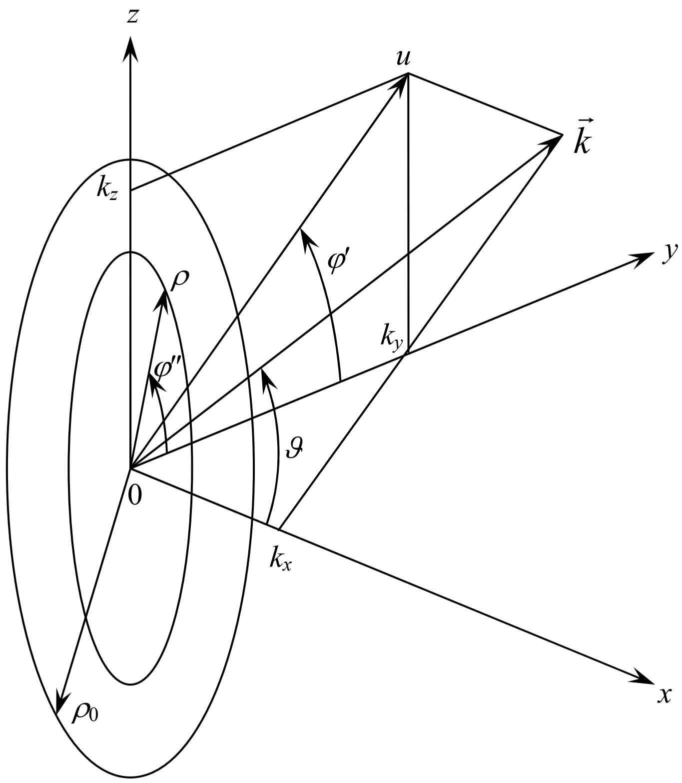

Рис.6.1. Геометрическая схема разложения волнового вектора $\vec{k}$ по составляющим $k_{x,y,z}$ в правой прямоугольной (x,y,z), цилиндрической (x,ρ,φ'') и полярной (ρ,φ') системах координат.

В спектральном представлении зависимость комплексной амплитуды $E(x,y,z)$ поля получается из решения волнового уравнения по Релею в прямоугольной правой системе координат x,y,z как двумерное Фурье-преобразование произведения углового спектра плоских волн

$\widehat{E}(0,u_1,u_2)$ распределения комплексной амплитуды поля $E(0,y,z)$ по апертуре антенны и частотной характеристики слоя свободного пространства тропосферы протяженностью x. Спектр плоских волн $\widehat{E}(u_1,u_2)$ как прямое двумерное Фурье-преобразование распределения комплексной амплитуды поля $E(0,y,z)$ описывается выражением

$$\widehat{E}(u_1,u_2)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}E(0,y,z)\exp[-\mathrm{i}(u_1y+u_2z)\,dydz. \qquad (6.1)$$

и соответственно обратное Фурье-преобразование

$$E(0,y,z)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\widehat{E}(u_1,u_2)\exp[\mathrm{i}(u_1y+u_2z)\,du_1du_2. \qquad (6.2)$$

В (6.2) обозначено

$k_y=u_1$; $k_z=u_2$, следовательно $k_x=\sqrt{k^2-k_y^2-k_z^2}=\sqrt{k^2-u_1^2-u_2^2}$.

Распространение вдоль оси x плоской волны, а следовательно, и спектра плоских волн пучка ММ-волн описывается решением волнового уравнения (уравнение Гельмгольца)

$$d^2\widehat{E}(x,u_1,u_2)-u_1\widehat{E}(x,u_1,u_2)-u_2\widehat{E}(x,u_1,u_2)+k^2\widehat{E}(x,u_1,u_2)=0\,.$$

с использованием экспоненциальной функции $\widehat{E}\sim \mathrm{e}^{\beta x}$. Выражение для β получается из характеристического уравнения в виде

$$\beta^2+(k^2-u_1^2-u_2^2)=0\,,$$

из которого следует $\beta=\pm i\sqrt{k^2-u_1^2-u_2^2}$.

Для распространяющихся плоских волн выбирается $\beta_1=i\sqrt{k^2-u_1^2-u_2^2}$.

Так что решение для углового спектра $\widehat{E}(x,u_1,u_2)$ получается в виде произведения углового спектра плоских волн комплексной амплитуды на раскрыве апертуры антенны и угловой спектральной характеристики слоя «x» среды распространения

$$\widehat{E}(x,u_1,u_2)=\widehat{E}(0,u_1,u_2)\exp\left[ix\sqrt{k^2-u_1^2-u_2^2}\,\right].$$

В соответствии с обратным Фурье-преобразованием аналогичному (6.2) комплексная амплитуда $E(x,y,z)$ записывается в виде

$$E(x,y,z)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\widehat{E}(0,u_1,u_2)\exp\left(\mathrm{i}x\sqrt{k^2-u_1^2-u_2^2}\right)\times$$

$$\times\exp[\mathrm{i}(u_1y+u_2z)du_1du_2\,, \qquad (6.3)$$

Для круглой апертуры антенны (рис.6.1) для снижения кратности интегрирования целесообразно перейти из прямоугольной системы координат yz; u_1u_2 в полярную $\rho\varphi$.

Из геометрических построений на рис.6.1 получаются соотношения

$$\begin{aligned} u_1 &= k\sin\vartheta\cos\varphi'; \quad y = \rho\cos\varphi'', \\ u_2 &= k\sin\vartheta\sin\varphi'; \quad z = \rho\sin\varphi''. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Из (6.4) следует

$$u = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = k\sin\vartheta,\ k_x = \sqrt{k^2 - u^2}$$

После преобразования переменных с учетом осесимметричности апертуры соотношение (6.3) приобрело вид

$$E(x,\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \hat{E}(u)\exp\left(\mathrm{i}\,x\sqrt{k^2-u^2}\right)u\,du\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\left(\mathrm{i}\,u\rho\cos\varphi_-\right)d\varphi_-\,, \tag{6.5}$$

где $\varphi_- = \varphi' - \varphi''$.

Интеграл

$$I_\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\left(\mathrm{i}\,u\rho\cos\varphi_-\right)d\varphi_- = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\exp\left(\mathrm{i}\,u\rho\cos\varphi_-\right)d\varphi_- = J_0(u\rho).$$

является табличным []. После подстановки I_φ в выражение (6.5) оно преобразуется к виду

$$\mathrm{E}(x,\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \hat{E}(u)\exp\left(\mathrm{i}x\sqrt{k^2-u^2}\right)uJ_0(u\rho)du. \tag{6.6}$$

С учетом обозначения

$$K(x,u) = \exp\left(\mathrm{i}\,x\sqrt{k^2-u^2}\right) \tag{6.7}$$

выражение (6.6) представляется в виде

$$E(x,\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \hat{E}(u)K(x,u)u\,J_0(u\rho)\,du\,. \tag{6.8}$$

При x=0, $K(0,u)$=1, $E(0,\rho)$=$E(\rho)$ и соотношение (6.6) становится частным случаем преобразования Ханкеля и в совокупности с прямым преобразованием $\hat{E}(u)$ образуют пару преобразований Фурье-Бесселя в виде

$$\hat{E}(u) = 2\pi\int_0^\infty E(0,\rho)\rho J_0(u\rho)\,d\rho. \tag{6.9}$$

$$E(\rho)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\widehat{E}(u)uJ_0(u\rho)\,du. \qquad (6.10)$$

Описание комплексной амплитуды поля выражением (6.8) интерпретируют как преобразование углового спектра $\widehat{E}(u)$ слоем линейной среды распространения свободного пространства атмосферы протяженностью x с угловой спектральной характеристикой $K(x,u)$ по аналогии с преобразованием временного частотного спектра $\widehat{S}(\mathrm{i}\omega)$ радиотехническими линейными цепями с частотной характеристикой $K(\mathrm{i}\omega)$ и временным входным сигналом $S(t)$.

Для равноамплитудной синфазной комплексной амплитуды на раскрыве параболической антенны радиуса ρ_0 угловой спектр $\widehat{E}(u\rho_0)$ как преобразование Фурье-Бесселя (6.9) с использованием преобразованного табличного интеграла []

$$I_\rho=\int_0^{\rho_0}J_0(u\rho)\rho\,d\rho=\frac{\rho_0}{u}J_1(u\rho_0)=\frac{\rho_0^2J_1(u\rho_0)}{u\rho_0}=\rho_0^2\,\frac{2J_1(u\rho_0)}{2u\rho_0}=\frac{\rho_0^2}{2}\Lambda_1(u\rho_0)$$

записывается в виде

$$\widehat{E}(u\rho_0)=2\pi E_0\int_0^{\rho_0}J_0(u\rho)\rho\,d\rho=E_0\sum\nolimits_0\frac{2J_1(u\rho_0)}{u\rho_0}=E_0\Sigma_0\Lambda_1(u\rho_0), \qquad (6.11)$$

где $u\rho_0=k\rho_0\sin\vartheta$, $\Lambda_1(u\rho_0)$ – лямбда-функция первого порядка [6.4], $\Sigma_0=\pi\rho_0^2$ – геометрическая площадь апертуры антенны.

Соотношение (6.11) – пример общего вывода о том, что формируемая в волновой зоне диаграмма направленности антенны $F(\vartheta)=\widehat{E}(u\rho_0)\big/\widehat{E}(0)$ представляет нормированный угловой спектр.

На рис.6.2 приведена зависимость нормированного модуля $|F(\vartheta)|$ углового спектра с равноамплитудной синфазной комплексной амплитудой на осесимметричном раскрыве антенны с $\rho_0=1{,}1\cdot10^{-1}$ м, $\lambda=10{,}5\cdot10^{-3}$ м [6.6].

Во френелевском (малоугловом) приближении $u/k=\sin\vartheta=\rho/x<<1$ возможно упрощение угловой спектральной характеристики $K(x,u)$.

В показателе экспоненциальной функции (6.6) выражение $\sqrt{k^2-u^2}=k_x$ ограничивают квадратичным членом разложения

$$k_x\cong k\left(1-\frac{u^2}{2k^2}\right). \qquad (6.12)$$

Приближение (6.12) соответствует малым углам $\vartheta<<1$ и отклонениям ρ от оси x. Поэтому приближение (6.12) также называют малоугловым.

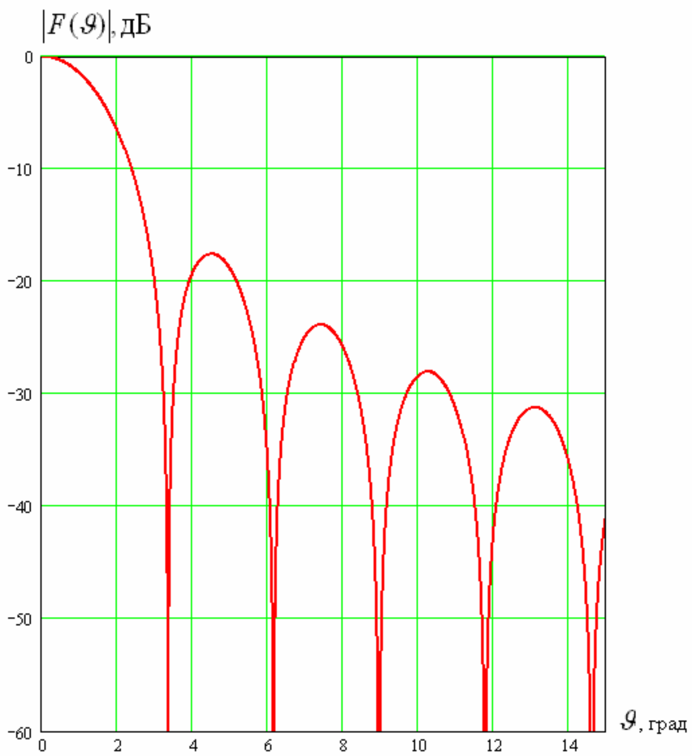

Рис.6.2. Нормированный на максимум модуль углового спектра (диаграммы направленности) передающей антенны с равноамплитудным синфазным распределением

В приближении (6.12) угловая спектральная характеристика среды распространения (6.7) становится квадратичной и соотношение (6.8) преобразуется к виду:

$$E(x,\rho)=\frac{e^{ikx}}{2\pi}\int_0^{\infty}\widehat{E}(u)\exp\left(-\frac{iu^2x}{2k}\right)u\,J_0(u\rho)\,du\,. \qquad (6.13)$$

Для упрощения и наглядности обычно предполагают на раскрыве излучающей антенны равноамплитудный синфазный (плоский) фазовый фронт. Образование зон Френеля на апертуре антенны рассматривают по схемам, приведенным на рис.6.3а и рис.6.3б. Из точки на расстоянии x от фазового центра апертуры на раскрыве антенны (в плоскости $0yz$) выделяют изображенные на рис.6.3а зоны излучения (дифракции на круглом отверстии) приходящего в точку приема x (рис.6.3б) (светлые круг, кольца и тёмные кольца) отличающиеся по фазе на $\pi/2$. Из рассмотрения треугольника на рис.6.3б с катетами 0ρ, $0x$ и гипотенузой $r=x+\Delta r$ следует, что разность фаз образуется из-за разности хода $\Delta r=\sqrt{x^2+\rho^2}-x$ между координатами ρ плоского фазового фронта на раскрыве антенны и радиусом x точки виртуальной сферической поверхности равных фаз, излучение которой поступает в фазе в точку приёма x. Круг и кольца на апертуре антенны (отверстии) называют зонами Френеля на апертуре антенны (отверстии).

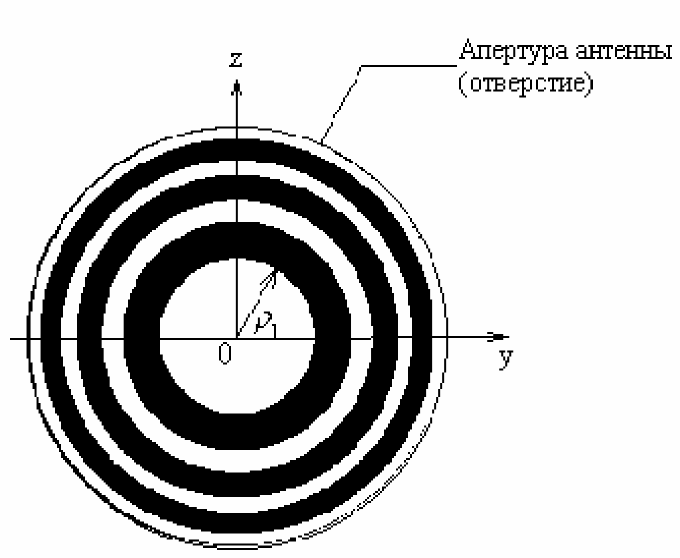

Рис.6.3а. Зоны Френеля на апертуре антенны (отверстия)

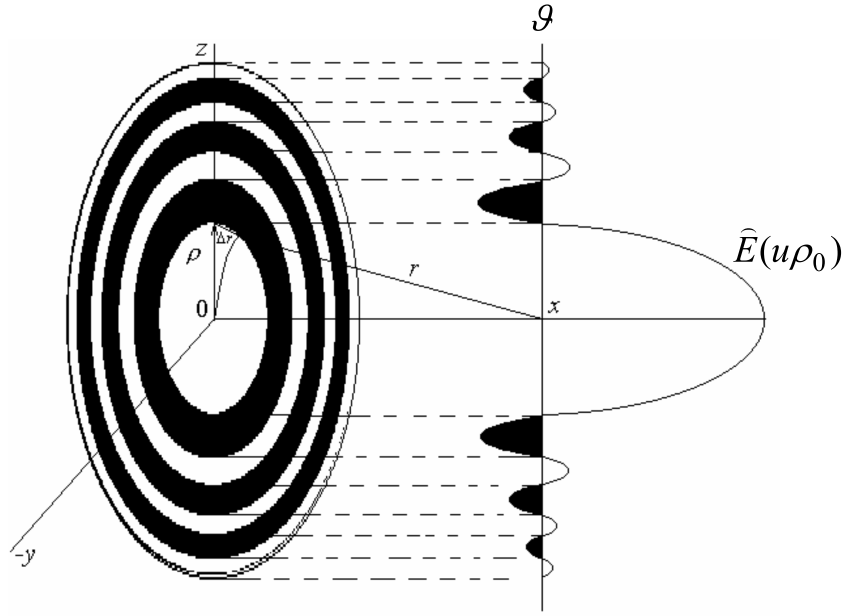

Рис.6.3б. Апертура параболической антенны с нанесёнными зонами Френеля и вынесенное качественное сечение углового спектра $\widehat{E}(\vartheta) = \widehat{E}(k\rho_0 \sin\vartheta)$ равноамплитудного осесимметричного распределения поля $E(0,\rho)=E_0$ на плоскости $0yz$ (ρ,φ'') рис.6.3а

Для установления зависимости радиусов ρ_m зон Френеля на интервале апертуры ρ в пределах сохранения френелевского (квазиоптического) приближения $\rho/x \leq 1$ разность хода Δr оценивали по соотношению:

$$\Delta r = \sqrt{x^2 + \rho^2} - x = x\sqrt{1 + \frac{\rho^2}{x^2}} - x \approx \frac{\rho^2}{2x}$$

с разложением в ряд слагаемого $x\sqrt{1 + \frac{\rho^2}{x^2}}$ и сохранением только члена разложения $\Delta r \approx \rho^2/2x$.

Разность фаз $\Delta\varphi$ соответствующая такой разности хода Δr описывается выражением

$$\Delta\varphi = k\Delta r \approx \frac{k\rho^2}{2x} = \frac{\pi\rho^2}{\lambda x}. \qquad (6.14)$$

Зоны Френеля нумеруют [6.2], исходя из равенства:

$$\frac{\pi\rho_m^2}{\lambda x} = \frac{\pi}{2}m, \quad m = 1, 2, ..., N, \qquad (6.15)$$

$$\text{откуда } \rho_m = \sqrt{\frac{m\lambda x}{2}}, \qquad (6.16)$$

$$\text{а } \rho_1 = \sqrt{\frac{\lambda x}{2}} \qquad (6.17)$$

– радиус первой зоны Френеля (радиус светлого круга на рис.6.1).

Можно показать, что площади френелевских m-ных колец описываемых соотношением

$$\Sigma_m = \frac{\pi\lambda x}{2} = \pi\rho_1^2 \qquad (6.18)$$

являются одинаковыми равными площади круга с радиусом первой зоны Френеля.

Ширина же френелевских колец $\delta\rho_m = \rho_1 / \left(\sqrt{m} + \sqrt{m-1}\right)$ уменьшается с ростом номера радиуса m, что иллюстрирует рис.6.3а.

Зонам Френеля в трёхмерном пространстве соответствуют френелевские эллипсоиды [6.2].

При ограниченной апертуре ρ_a по мере удаления от антенны (возрастание x), радиус первой зоны Френеля (6.9) увеличивается, а число зон Френеля на апертуре уменьшается и при $\sqrt{\lambda x/2} = \rho_0$ основной вклад элементарных источников будет определяться кругом на апертуре с радиусом первой зоны Френеля ρ_1 [6.2].

Для классификации зон приёма излучения антенны (дифракции на круглом отверстии с радиусом ρ_0 в непрозрачном экране) вдоль оси x вводят волновой параметр P как отношение первого радиуса зоны Френеля ρ_1 к радиусу апертуры ρ_a=ρ_0 (отверстия)

$$P = \frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{\sqrt{\lambda x/2}}{\rho_0}. \qquad (6.19)$$

При P<0,1 сохраняя в (6.12) лишь линейный член $k_x \approx k$, (u=0), т.е. пренебрегая квадратичным членом ($u^2/2k^2 = \sin^2\vartheta/2 = 0$) частотная характеристика $K(x,u) \approx K(x,0) = e^{ikx}$. При этом соотношение (6.1) преобразуется к виду

$$E(x,\rho) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{2\pi}\int\limits_0^\infty \widehat{E}(u) u J_0(u\rho)\,du\,. \tag{6.20}$$

В соответствии с (6.10) интеграл (6.20) представляет распределение комплексной амплитуды по апертуре $E(0,\rho)$. С учетом этого выражение (6.13) преобразуется к виду:

$$E(x,\rho) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\, E(0,\rho)\,. \tag{6.21}$$

Из соотношения (6.21) следует, что при малом волновом параметре $P < 0{,}1$ в приближении линейной фазы $\varphi(x) = kx$ угловой спектральной характеристики слоя свободного пространства среда распространения пропускает весь спектр вдоль оси x без поглощения и амплитуда пучка сохраняет форму распределения амплитуды по апертуре, а изменяется лишь фаза [8].

Из приведенного наглядного спектрального анализа следует, что вдоль оси x (направление распространения пучка) до значений волнового параметра $P < 0{,}1$ существует зона приёма с амплитудой поля, совпадающей с амплитудой на апертуре. Эта зона приёма излучения называется геометрооптической.

Зона в интервале волнового параметра $0{,}1 < P \le 1$ называется переходной (френелевской) от геометрооптической к волновой $P > 1$ (фраунгоферовой).

Для определения протяженности переходной френелевской зоны наблюдения целесообразно наглядно судить по нормированной на E_0 единичной амплитуде $A(x,\rho)$ (модуля) комплексной функции (6.13), определяемой из представления $E(x,\rho)/E_0$ в виде

$$\frac{E(x,\rho)}{E_0} = A(x,\rho)\exp\left[\mathrm{i}\varphi_E(x,\rho)\right], \tag{6.22}$$

Из соотношений (6.13) и (6.22) получаем выражение амплитуды

$$A(x,\rho) = \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_0^\infty \widehat{E}(u)\exp\left(-\mathrm{i}\frac{u^2 x}{2k}\right) u\, J_0(u\rho)\,du\right| \tag{6.23}$$

и $\varphi_E(x,\rho) = \arg[E(x,\rho)/E_0]$ – фазы комплексной амплитуды с учетом фазы распределения поля по апертуре антенны и угловой спектральной характеристики во френелевском приближении (6.12).

Зависимость от расстояния x амплитуды $A(x,0)$ на оси пучка получается из (6.23) при ρ=0 как модуль преобразования Френеля углового спектра в виде:

$$A(x,0) = \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_0^\infty \widehat{E}(u)\exp\left(-\mathrm{i}\frac{u^2 x}{2k}\right) u\,du\right|. \tag{6.24}$$

В координатном же представлении вычисление интеграла Кирхгофа интегрирование по ρ допустимо лишь на ограниченной апертуре $[0, \rho_0]$, что приводит к громоздким выражениям.

При вычислении зависимости амплитуды пучка в геометрооптической и переходной (френелевской) зонах приёма по соотношению (6.24) интегрирование углового спектра $\widehat{E}(u)$ допустимо на интервале $[0,\infty]$ составляющих u волнового вектора $\vec{k}$.

Это одна из причин целесообразности решения задачи методом Релея во френелевской зоне наблюдения.

На рис.6.4 приведены зависимости от x и P амплитуды $A(x,0)$ в геометрооптической, переходной (френелевской) и дальней зонах.

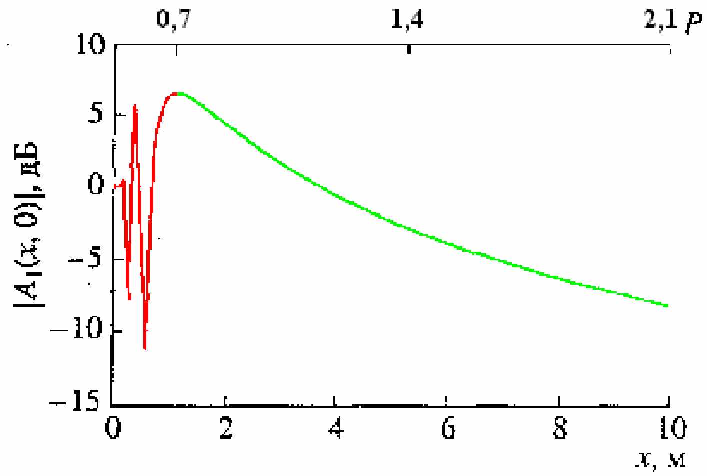

Рис.6.4. Зависимость от x амплитуды на оси пучка $A(x,0)$ во френелевской $0,1<P<1$ зоне и на начальном участке x волновой зоны $\sqrt{\lambda x/2} > \rho_0$

Как следовало ожидать в геометрооптической зоне ($P<0,1$) с точностью численного расчета нормированная амплитуда постоянна. По мере удаления от апертуры антенны x возрастает и на апертуре начинают укладываться меньшее число зон Френеля с отличающимися по радиусу на $m\pi/2$ (по диаметру $m\pi$) фазами, так что в точках наблюдения при сложении полей от разных зон Френеля возникают нарастающие по амплитуде осцилляции. Только при значениях с $P\geq1$ ($\sqrt{\lambda x/2} > \rho_0$) в волновой зоне из-за расходимости пучка (дифракция Фраунгофера) начинается уменьшение амплитуды.

Данные численного интегрирования на рис.6.4 подтвердили, что как и ожидалось, во френелевской зоне наблюдения на оси пучка нормированная амплитуда пучка осциллирует около единицы.

Кривая на рис.6.4 также иллюстрирует границу перехода от осциллирующей зоны Френеля $P = \dfrac{\sqrt{\lambda x/2}}{\rho_0} \approx 1$ к волновой, где зависимость амплитуды на оси пучка обратно пропорциональна x как направленной сферической волны.

7. Комплексная амплитуда поля узкого гауссового пучка в свободном пространстве распространения

У малогабаритной параболической антенны с согласующим КВЧ стаканом, открытым концом круглого волновода и дисковым отражателем как облучателя основного зеркала [], конического рупора и рупорно-линзовой антенны поле $E(0,\rho)$ по раскрыву аппроксимировалось синфазным $\varphi_E(0,\rho_*)=0$ гауссовским распределением на пьедестале

$$E(0,\rho)=E_0\exp\left(-\frac{\rho^2}{\rho_e^2}\right)=\begin{cases}E_0\exp(-\rho_*^2)\,,\ 0\le\rho_*\le 1, \varphi_E(0,\rho_*)=0,\\ 0\,, \qquad\qquad \rho_*=\rho/\rho_e>1.\end{cases} \quad (7.1)$$

При неравноамплитудном распределении по апертуре вводится эффективная площадь $\Sigma_э$ раскрыва, определяемая по соотношению

$$\Sigma_э=\frac{\left|\int\limits_\Sigma E_\Sigma\, d\Sigma\right|^2}{\int\limits_\Sigma\left|E_\Sigma\right|^2 d\Sigma} \quad (7.2)$$

и коэффициент использования площади антенны (КИП) $\nu=\Sigma_э/\Sigma$. Концентрацию мощности излучения направленной антенны характеризуют коэффициентом усиления (направленного действия) антенны

$$G_0=\eta\frac{4\pi\Sigma_э}{\lambda^2}=\eta\nu\frac{4\pi\Sigma}{\lambda^2}, \quad (7.3)$$

где η – КПД антенны, $\nu=\Sigma_э/\Sigma$.

Для гауссовского пучка (7.1) формируемого круглой апертурой параболической антенны из соотношения (7.2) получается $\Sigma_э=0{,}463\Sigma$ и $\nu=\dfrac{\pi\rho_э^2}{\pi\rho_0^2}=\dfrac{\rho_э^2}{\rho_0^2}$, следовательно, $\rho_э=\sqrt{\nu}\rho_0\approx 0.68\rho_0$.

Для $\nu=0.463$ и $\eta=0.92$ ($10\cdot\lg\eta\nu\approx-4$дБ) по соотношению (7.3) следует ожидать уменьшения усиления G_{0t} для гауссовского распределения примерно на 4дБ в сравнении с равноамплитудным и снижением уровня боковых лепестков.

Вычисление углового спектра $\widehat{E}(u)$ гауссовского пучка на пъедестале в волновой зоне $P\gg\sqrt{\lambda x/2}\big/\rho_e\gg 1$ было выполнено по соотношению (6.13) интегрированием на интервале $u\in[0,\infty]$, сводя преобразование (6.13) к табличному интегралу и реализуя тем самым возможность получения аналитического выражения применимого в волновой зоне.

С использованием безразмерных переменных $u\rho=u\rho_e\rho_*=s\rho_*$

(s=$u\rho_e$) и табличного интеграла []

$$\int_0^\infty \exp\left(-q\vartheta^2\right) J_0(\vartheta s)\vartheta\, d\vartheta = \frac{\exp(-s^2/4q)}{2q} \tag{*}$$

с учётом q = 1, после перехода к безразмерной переменной ρ_* соотношения (6.9) для углового спектра гауссовского пучка получилось выражение

$$\widehat{E}(u) = E_0 2\pi\rho_e^2 \int_0^\infty \exp(-\rho_*^2) J_0(u\rho_e\rho_*)\rho_*\, d\rho_* = E_0\pi\rho_e^2 \exp\left(-\frac{u^2\rho_e^2}{4}\right). \tag{7.4}$$

После подстановки $\widehat{E}(u)$ (7.4) в (6.13) было получено выражение

$$E(x,\rho) = \frac{E_0\pi\rho_e^2\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{2\pi} \int_0^\infty \exp\left(-\left[u^2\left(\frac{\rho_e^2}{4} + \frac{\mathrm{i}\,x}{2k}\right)\right]\right) u\, J_0(u\rho)\, du. \tag{7.5}$$

С обозначением $q = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{\mathrm{i}\,x\lambda}{\pi\rho_e^2}\right) = \frac{1}{4}\left(1 + \mathrm{i}\,D\right)$, где $D = \frac{\lambda x}{\pi\rho_e^2} = \frac{2P^2}{\pi}$ – интеграл в (7.5) является вышеупомянутым табличным интегралом (*). Как следует из (7.5) после подстановки вместо $\vartheta = u_*$, $s = \rho_*$, q = (1+iD)/4 комплексная амплитуда поля гауссовского пучка в волновой зоне записывается в виде:

$$E(x,\rho) = \frac{E_0 \exp\left[-\left(\frac{\rho^2}{\rho_e^2(1+\mathrm{i}\,D)} - ikx\right)\right]}{1+\mathrm{i}\,D}. \tag{7.6}$$

Как и ожидалось, соотношение (7.6) совпадает с выражением интеграла Кирхгофа как свёртки коллимированного гауссовского пучка и параболической функции Грина с интегрированием по ρ на интервале $\rho\in[0,\infty]$ в координатном представлении, как гауссовского пучка без пьедестала.

С введением единичной амплитуды $A(x,\rho)$ как нормированного модуля комплексной амплитуды $|E(x,\rho)|/E_0$ и аргумента (фазы) $\varphi_E(x,\rho)$ в виде (6.22) выражение модуля согласно свойству комплексной функции определяется по соотношению:

$$A(x,\rho) = \frac{\sqrt{E(x,\rho)E^*(x,\rho)}}{E_0} = \frac{\sqrt{|E(x,\rho)|^2}}{E_0} = \frac{|E(x,\rho)|}{E_0}. \tag{7.7}$$

После соответствующих преобразований для амплитуды и фазы в сечении $x\rho$ гауссовского пучка были получены выражения

$$A(x,\rho) = \frac{1}{\sqrt{1+D^2}} \exp\left[-\frac{\rho^2}{\rho_e^2(1+D^2)}\right], \tag{7.8}$$

$$\varphi_E(x,\rho) = kx + \frac{\rho^2}{\rho_e^2}\frac{D}{(1+D^2)} - \operatorname{arctg} D. \qquad (7.9)$$

При $x \to \infty$, $D = \dfrac{\lambda x}{\pi \rho_e^2} \to \infty$ вторым членом в (7.9) можно пренебречь и arctg $D \approx \pi/2$. Таким образом, в волновой зоне выражение (7.9) преобразуется к виду

$$\varphi_E(x,\rho) = kx - \frac{\pi}{2}. \qquad (7.9а)$$

Зависимость амплитуды $A(x,0)$ на оси гауссовского пучка в переходной (френелевской) к волновой (фраунгоферовой) зоне была получена численным интегрированием соотношения (6.13) представленного в виде

$$A(x,0) = \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^1 \exp(-\rho_*^2) J_0(u_*\rho_*)\rho_*\, d\rho_* \int_0^{3,8} \exp(-u_*^2 q) u_*\, du_*\right|. \qquad (6.13а)$$

Сначала вычислялись значения углового спектра интегрированием по ρ_* на ограниченном пьедесталом интервале $\rho_e = \rho_a$, $\rho_* \in [0, 1]$

$$\widehat{E}(u_*) = 2\pi E_0 \rho_e^2 \int_0^1 \exp(-\rho_*^2) J_0(u_*\rho_*)\rho_*\, d\rho_*,$$

а затем на ограниченном частотном интервале $u_* \in [0, 3,8]$ в пределах главного лепестка углового спектра.

На рис.7.1 приведены результаты численного интегрирования $A(x,0)$ для λ=10,5·10^{-3} м, ρ_e=0,11 м.

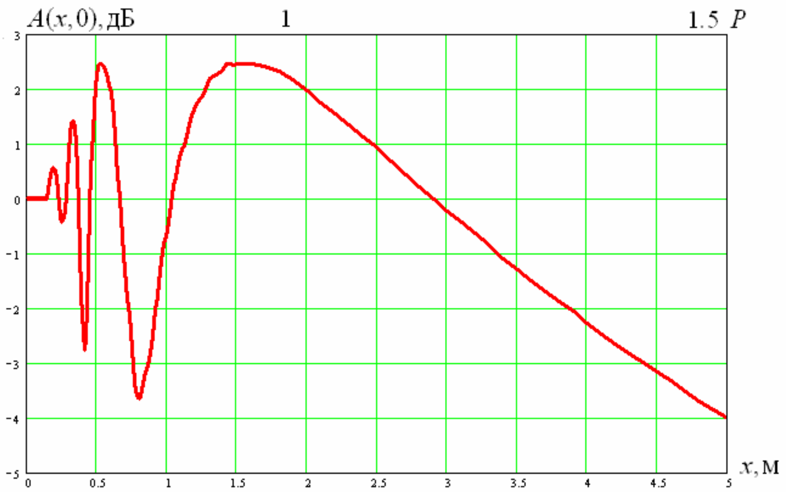

Рис.7.1. Зависимость от x амплитуды на оси гауссовского пучка $A(x,0)$ во френелевской 0,1<P<1 зоне и на начальном участке x волновой зоны $\sqrt{\lambda x/2} > \rho_0$.

Как и следовало ожидать, максимум осцилляций уменьшился на 4 дБ по сравнению с кривой на рис.6.4 для равноамплитудного распределения по апертуре.

Из знаменателя показателя гауссовской функции (7.8) следует, что линейное расширение радиуса сечения пучка $\rho_e(x)$ на уровне уменьшения амплитуды в e=2,7 раза описывается соотношением

$$\rho_e^2(x) = \rho_e^2(1 + D^2) = z_e^2(x)\,. \tag{7.10}$$

После подстановки D в (7.10) получается выражение, описывающее две ветви гиперболы в плоскости x0z

$$\frac{z^2}{\rho_e^2} - \frac{x^2\lambda^2}{(\pi\rho_e^2)^2} = \mp 1, \tag{7.11}$$

которое преобразуется к каноническому виду

$$\frac{z^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \mp 1, \tag{7.12}$$

с параметрами $a=\pi\rho_e^2/\lambda$ и $b=\rho_e$. Из соотношения (7.11) следует, что при $z=0$, $x=a$. Это означает, что «a» характеризует сдвиг вправо (рис.7.2) ветви гиперболы относительно начала расположения антенны ($x=0$).

В волновой зоне $x >> 2\rho_e^2/\lambda >> 1$ образующую $\rho_e(x)$ на уровне френелевского гиперболоида излучения в плоскости $x0z$ $\rho_e(x) = z_e(x)$ можно заменить асимптотами $z_e(x) = \pm bx/a$.

Полагая $2\vartheta_e$=2arctg$(b/a)\approx 2\lambda/\pi\rho_e$ выражение для асимптот $z_e(x)$ приобретает вид

$$z_e(x) = \rho_e(x) = \pm\vartheta_e x, \tag{7.13}$$

где $2\vartheta_e=2\lambda/\pi\rho_e$ – угол расходимости круглого прямого конуса.

На рис.7.2 представлена правая ветвь гиперболы с асимптотами (7.13) для $\lambda=10{,}5\cdot 10^{-3}$м, $\rho_e=\rho_0=1{,}1\cdot 10^{-1}$м, a=3,65 м, ϑ_e=1,7°.

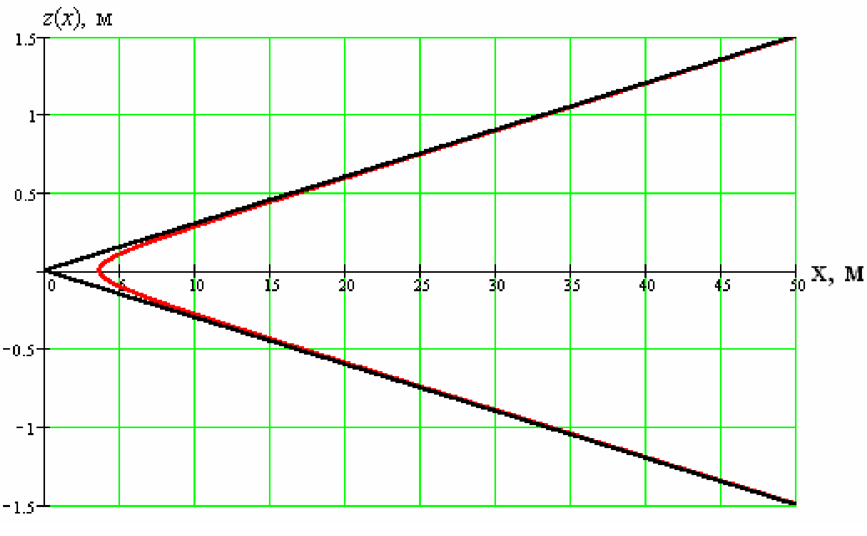

Рис.7.2. Правая ветвь гиперболы с асимптотами $z_e(x)$ для $\lambda=10{,}5\cdot 10^{-3}$м, $\rho_e=\rho_0=1{,}1\cdot 10^{-1}$м

Из данных вычислений представленных на рис.7.2 асимптот правой ветви гиперболы следует, что при распространении коллимированного гауссовского пучка в волновой зоне гиперболоид может быть аппроксимирован асимптотическим прямым круглым конусом с образующими (7.13), осью симметрии, совпадающей с направлением распространения пучка. Из соотношения (7.9) также следует, что фазовый фронт пучка изменяется от плоского на апертуре (x=0, R=∞) до параболического в волновой зоне.

Нормированный на максимум модуль углового спектра в волновой зоне – это модуль диаграммы направленности в зависимости от угла ϑ. Выражение модуля углового спектра следует из соотношения (7.4) с преобразованием аргумента гауссовской функции

$$\frac{u^2\rho_e^2}{4} = \frac{k^2\sin^2\vartheta}{4}\rho_e^2 \approx \frac{\pi^2\rho_e^2\vartheta^2}{\lambda^2} = \frac{\vartheta^2}{\vartheta_e^2}.$$

Таким образом, модуль нормированного углового спектра гауссовского пучка в волновой зоне описывается выражением

$$F_t(\vartheta) = \exp\left(-\frac{\vartheta^2}{\vartheta_e^2}\right). \qquad (7.15)$$

Этого и следовало ожидать, т.к. преобразование Фурье-Бесселя (5.9) от гауссовской функции должно быть гауссовской функцией.

На рис.7.3 приведены формы основных лепестков нормированных модулей угловых спектров (диаграмм направленности) пространственно ограниченного пьедесталом гауссовского пучка (7.5) и равноамплитудного синфазного пучка при λ=10,5·10^{-3} м, ρ_e=ρ_0=0,11м, ϑ_e=1,74°.

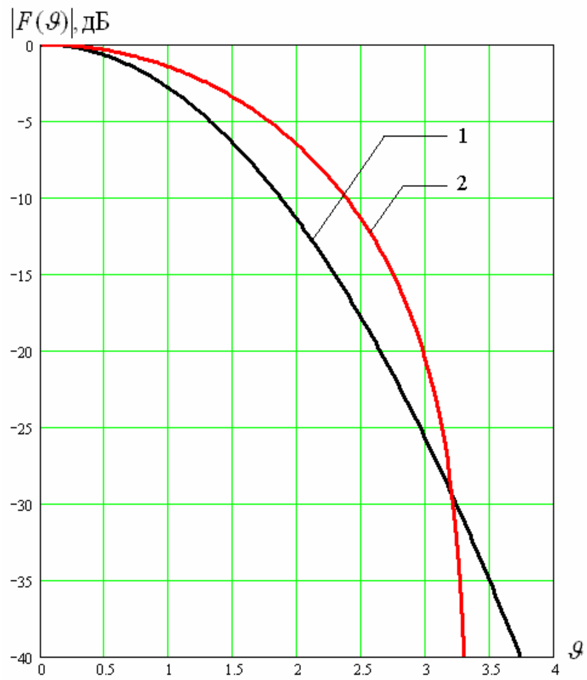

Рис.7.3. Нормированные угловые спектры: 1 – пространственно ограниченного пьедесталом гауссовского пучка (7.5), 2 – равноамплитудного синфазного пучка (6.11)

Из сравнения угловых спектров распределения комплексных амплитуд гауссовского пучка и равноамплитудного следует, что угловой спектр гауссовского пучка незначительно уширяется на 0,18 градуса в сравнении с равноамплитудным распределением комплексной амплитуды.