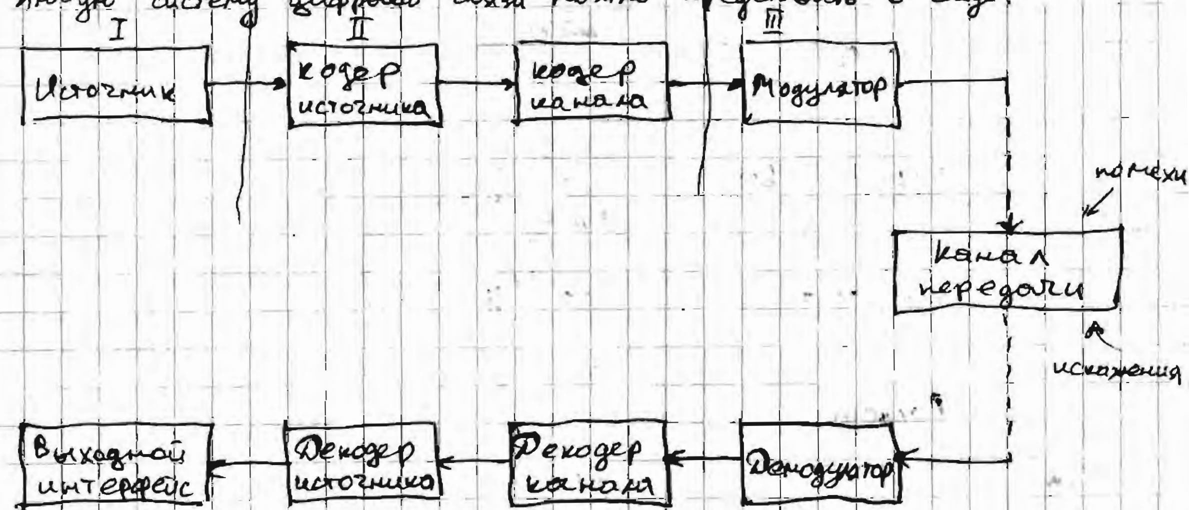
Бумагин

Теоретические основы цифровой передачи информации.

ЛЕКЦИЯ 1 (6.09.06)

Элементы системы цифровой связи (передача данных)

Любую систему цифровой связи можно представить в виде:



Канал связи – это физическая среда, которая используется для передачи сигналов от передатчика к приемнику.

Модуляция – это процесс преобразования информационных сигналов в сигналы, параметры которых совместимы с каналом передачи.

Характеристики каналов связи.

Основная проблема передачи информации через каналы это аддитивный шум. Имеются также искажения.

1) Проводные каналы (витые пары с полосой передачи от 1 кГц до 100 кГц; коаксиальный кабель с полосой передачи от 1 кГц до 100 МГц

волноводы с полосой передачи от 1 до сотен ГГц; волоконно-оптические каналы)

Волоконно-оптические каналы обладают широкой полосой передачи и низким затуханием.

2) Беспроводные каналы

λ		f
	УФ	~~1000 ТГц~~
	Видимый свет	10^{15} Гц
	ИК-каналы	10^{14} Гц
1 мм	Волновод	000 ГГц
1 м	Коаксиальный кабель	1 ГГц 1 МГц
1 км	Витые пары	000 кГц ~~кГц~~ 1 кГц
100 км		

Основная проблема при передаче радиоволн – это размер антенны. $L \geq \frac{1}{10}\lambda$.

Диапазоны частот радиосвязи.

Способы распространения э/м волн делятся на 3 категории:

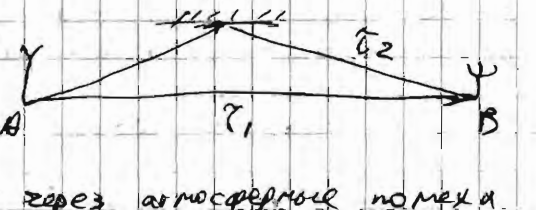
- поверхностные волны.
- пространственные волны.
- прямые волны.

1) Очень низкие частоты 0 - 10 кГц. Волны равномерно распространяются вокруг Земли. Огромная подверженность атмосферным помехам и очень узкая полоса передачи сигнала.

2) АМ-вещание 100 кГц - 3 МГц. Подверженность атмосферным шумам и помехам, помехам индустриального характера, помехам электронным компонентам радиоприемника. Низкая дальность распространения (<150 км). Волны в этом диапазоне распространяются вдоль пов-ти Земли путем многократного отражения от нижних слоев атмосферы.

3) Высокие частоты 3 МГц - 50 МГц. Замирание и многолучевость распространения радиоволн.

В радиосвязи к замираниям также относится кратковременное исчезновение сигнала.



4) Ультравысокие частоты. Проходят через атмосферные помехи без помех, используются в спутниковой связи. Дальность распространения ограничена линией горизонта.

5) Сверхвысокие частоты. Основная проблема - это зависимость поглощения радиоволн от атмосферных условий.

3) Подводный акустический канал. Проблемы: многолучевость и интерференция; частотно-зависимое затухание; биологические шумы и шумы техногенной природы.

4) Системы хранения информации.

ОТГОСБИ

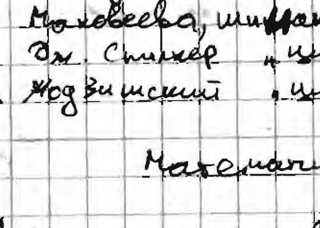
I Цифровая связь
- 1.1 Основы теории информации.
- 1.2 Сигналы, стат. характеристики и модуляция.
- 1.3 Демодуляция и восстановление информации.
- 1.4 Нелинейная модуляция.
- 1.5 Тактовые синхронизации в системах связи.
- 1.6 СПИ со многими несущими.
- 1.7

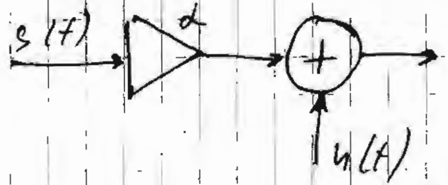
1. Липкин „Основы стат радиотехники, теории информации и кодирования"
2. Джон Прокис „Цифровая связь"
3. Бернард Скляр „Цифровая связь"
4. Маковеева, Шинаков „Системы связи с подвижными объектами"
5. Дж. Спилкер „Цифровая спутниковая связь"
6. Жодзишский „Цифровые радиоприемные системы"

Математические модели каналов связи.

1) Канал с аддитивным белым гауссовским шумом (АБГШ-канал)

$r(t) = s(t) + n(t)$

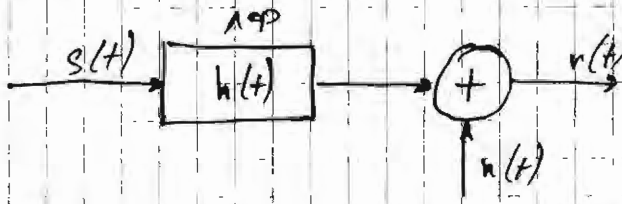




$r(t) = s(t)\cdot\alpha + n(t)$

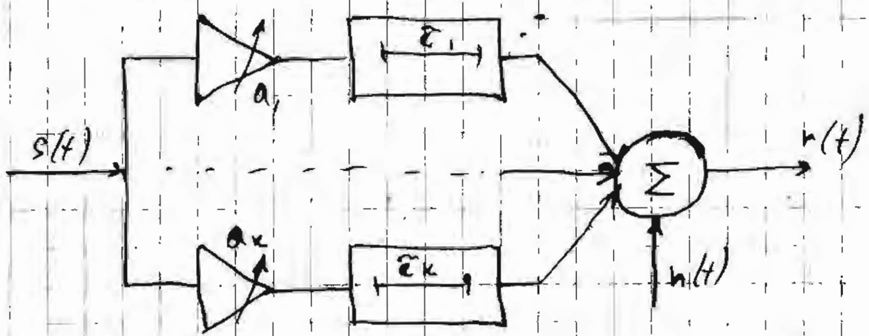
– с делителем

г) линейный фильтровой канал



$r(t) = s(t) * h(t) + n(t)$

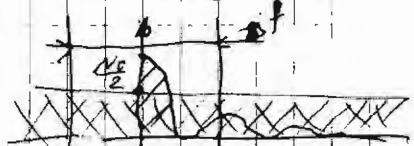
з) модель канала с задержками. (Фединг



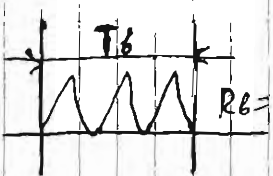
Основные параметры, характеризующие канал связи.

1) Отношение сигнал-шум (ОСШ; SNR)

$$\eta = \frac{P_c}{P_ш}$$



$$\eta = \frac{P_c = \int_{-\infty}^{\infty} S(f)\,df}{P_ш}$$



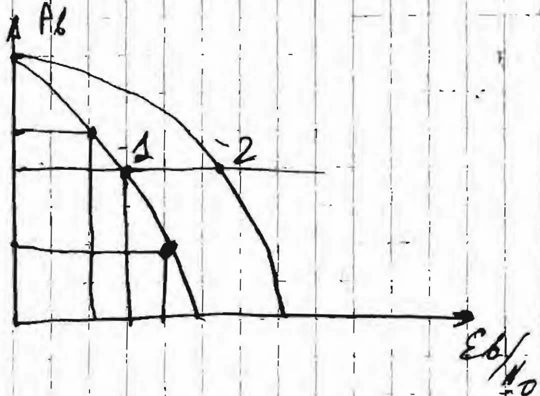
$R_b = 1/T_b$

$$\eta = \frac{P_c}{P_ш} = \frac{E_b/T_b}{N_0 \cdot \Delta f} = \frac{E_b \cdot R_b}{N_0 \cdot \Delta f}$$

для систем связи

R_b - аналог частоты
E_b - энергия бита.

В системах связи $ОСШ = \frac{E_b}{N_0} = \frac{P_c}{P_ш} \cdot \left(\frac{W}{R_b}\right)$



2) центральная частота спектра передаваемого сигнала

3) Ширина полосы пропускания канала.

4) Скорость передачи данных через канал.

5) Пропускная способность канала - скорость, с которой можем передавать инф-цию через канал без ошибок.

Системные компромиссы, возникающие при проектировании каналов связи.

Пожелания разработчиков систем цифровой связи:

- увеличение скорости передачи информации до максимально возможной. $R\uparrow, R \to \infty$
- минимизация вероятности битовой ошибки. $P_B \to 0$
- минимизация излучаемой мощности. $E_b \to 0$
- минимизация ширины полосы пропускания $\Delta f \to 0$

- максимизация эффективности использования системы (обслуживание максимального числа пользователей с минимальной задержкой и максимальной устойчивостью к задержкам)
- минимизация конструктивной сложности и вычислительной нагрузки.

Основные понятия теории информации.

Задача любого канала состоит в передаче информации на расстояние.

Информация - это совокупность сведений о состоянии какого-либо объекта. Совокупность сведений представлена в виде последовательности символов это информационное сообщение. Символы, которые могут входить в сообщение - это алфавит.

Количественные меры информации

$\{0; 1\}, a_i$

$I(a_i) = f(P_i\{a_i\})$

$P_i = P\{a_i / a_j, a_k, \ldots\}$

$I(a_i) = f(P_i = 1) = 0$

Пропускная способность канала связи и теорема оптимального кодирования.

$$\frac{dI(B)}{dt} = V_k \cdot H(B)$$

$H(B)$ — среднее кол-во информации, передаваемое через канал

V_k — символьная скорость (число символов в единицу времени $[\frac{бит}{сек}]$)

количество информации, передаваемое через канал в единицу времени

$$\frac{dI(A)}{dt} = V_u \; H(A)$$

Скорость передачи информации по каналам без помех зависит как от технической характеристики канала (объем алфавита, скорость передачи) так и от статистических свойств передаваемого сообщения (избыточность).

Для того, чтобы сравнивать различные каналы между собой нужно зафиксировать избыточность входного сообщения.

Будем использовать сообщения, у которых энтропия максимальна:

$H_{max}(B) = \log_2 m.$

$$C_k = \left[\frac{dI(B)}{dt}\right]_{max} = V_k \log_2 m$$ — при передаче безизбыточных сообщений

C_k характеризует максимально возможную скорость передачи информации по каналам и называется пропускной способностью.

Если избыточность > 0, то скорость передачи $<$ пропускной способности.

Пропускная способность — это максимально возможная величина для скорости передачи информации.

$M[I(a_i)]$

$$I(A') = -\sum_{i=1}^{m} \dots \sum_{q=1}^{m} P(a_{i1}, a_{i2} \dots a_{iq}) \log_2 P_{iq}$$

Когда все символы независимы получаем:

$$I(A) = \sum_{i=1}^{m} P_i I(a_i) = -\sum_{i=1}^{m} P_i \log_2 P_i$$

Среднее количество информации, передаваемое источником определяется только его вероятностными характеристиками и эта информация называется инф. энтропия источника

$$H(A) = I(A)$$

ЛЕКЦИЯ 2 (13.09.СК)

$$H(A) = -\sum_{i=1}^{m} P_i \log_2 P_i$$ m - величина алфавита

Если в какой-либо момент передачи информации имеет место искажение, то данное соотношение не работает. И информационная энтропия $H(A)$ уменьшается на некоторую величину которая определяется статистическими свойствами помехи

Если имеются искажения, то:

$$J = H(A) - H(A/A')$$

апостериорная энтропия.

Максимум информационной энтропии системы достигается в случае равновероятности и независимости информационных символов.

$P_i = \frac{1}{m}$

$$H_{max}(A) = -\sum_{i=1}^{m} P_i \log_2 P_i = -m \frac{1}{m} \log_2 \frac{1}{m} = \log_2 m$$

Чтобы передать max информации через канал в единицу времени во-первых нужно стремиться увеличить объем алфавита m и стремиться к независимости символов алфавита.

Оценим среднее количество символов, приходящихся на информационное сообщение с заданной энтропией.

$n \cdot H(A)$

минимальное кол-во символов, необходимых для передачи информации:

$$n_{min} = \frac{n \cdot H(A)}{H_{max}(A)} = \frac{n \cdot H(A)}{\log_2 m}$$

$$\rho_u = \frac{n - n_{min}}{n} = 1 - \frac{H(A)}{H_{max}(A)} = 1 - \frac{H(A)}{\log_2 m}$$

коэффициент избыточности источника.

Пример: вычислим энтропию для русского алфавита.

$H_{max}(A) = \log_2 32 = 5$ - для хаотического текста, когда имеются любые сочетания букв.

На практике $H_0(A) \cong 1,5$

$\rho_u = 1 - \frac{H_0(A)}{H_{max}(A)} \cong 0,7$ $\Rightarrow$ русский алфавит обладает большой избыточностью

Маловероятные символы вносят нулевой вклад в общую энтропию:

$$\lim_{P_i \to 0} P_i \log_2 P_i = 0$$

Энтропия источников непрерывных сообщений.

Источники непрерывных сообщений характеризуются тем, что в каждый момент времени t сообщение $x(t)$ может принимать бесконечное количество значений с бесконечно-малой вероятностью каждого из них. Если бы аналоговые сигналы передавались точно без искажений, они несли бы бесконечное количество информации. На практике энтропия источника непрерывных сообщений является конечной величиной.

Пусть $x(t)$ обладает пл-тью распределения $w(x)$

$\Delta x << x(t)$ Проведем дискретизацию

$P_i \quad x_i \le x(t) \le x_i + \Delta x$

$$P_i = w(x) \Delta x$$

$$H_{\Delta x}(X) = -\sum_{i=1}^{m} P_i \log_2 P_i = \sum_{i=1}^{m} [w(x_i)\Delta x_i] \log_2 [w(x_i)\Delta x_i] =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} w(x_i) \log_2 w(x_i) \Delta x - \log_2 \Delta x$$

перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$

$$H(x) = \lim_{\Delta x \to 0} H_{\Delta x}(x) = \underbrace{-\int_{-\infty}^{\infty} w(x) \log_2 w(x) dx}_{h(x)} - \lim_{\Delta x \to 0} \log_2 \Delta x$$

$h(x)$ - дифференциальная энтропия.

$h(x)$ - обладает конечным значением, не зависящим от шага квантования.

Второй компонент зависит от шага квантования и обращает энтропию источников непрерывных сообщений в бесконечность.

$\hat{x}(t)$ - оценка сигнала $x(t)$, $w(x/x')$

$H(x/\hat{x})$ - апостериорная энтропия

$$I(x/x') = H(x) - H(x/x') = h(x) - h(x/x')$$

$$h(x/x') = -\iint\limits_{-\infty}^{\infty} w(x/x') \log_2 w(x/x')\, dx\, dx'$$

По своему физическому смыслу дифференциальная энтропия случайного процесса $h(x)$ хар-ет степень его неопределенности. В отличие от энтропии дискретного распределения она может принимать значения и знак.

$x(t)$, $h(x)$

$x_1(t) = k\,x(t)$

$$h(x) = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} w(x_1) \log_2 w(x_1)\, dx_1 = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{w(x)}{k} \left(\log_2 \frac{w(x)}{k}\right) k\, dx =$$

$$= -\int\limits_{-\infty}^{\infty} w(x) \log_2 w(x)\, dx + (\log_2 k) \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty} w(x)\, dx}_{=1} = h(x) + \log_2 k$$

Можно показать, что при фиксированном значении дисперсии процесса $x(t)$ максимальная энтропия достигается для нормального закона распределения.

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{(x - m_x)^2}{2\sigma^2}\right), \quad h(x) = \log_2 \sqrt{2\pi e}\,\sigma$$

Пропускная способность канала связи и теорема оптимального кодирования.

$$\frac{dI(B)}{dt} = V_k \cdot H(B)$$ — среднее кол-во информации, передаваемое через канал

V_k — символьная скорость (число символов в единицу времени $\left[\frac{бит}{сек}\right]$)

количество информации, передаваемое через канал в единицу времени

$$\frac{dI(A)}{dt} = V_u \cdot H(A)$$

Скорость передачи информации по каналам без помех зависит как от технической характеристики канала (объем алфавита, скорость передачи) так и от статистических свойств передаваемого сообщения (вероятность).

Для того, чтобы сравнивать различные каналы между собой можно зафиксировать избыточность входного сообщения.

Будем использовать сообщения, у которых энтропия максимальна:

$$H_{max}(B) = \log_2 m.$$

при передаче безизбыточных сообщений

$$C_k = \left[\frac{dI(B)}{dt}\right]_{max} = V_k \log_2 m$$

C_k — характеризует максимально возможную скорость передачи информации по каналам и называется пропускной способностью.

Если избыточность > 0, то скорость передачи < пропускной способности.

Пропускная способность — это максимально возможная величина для скорости передачи информации.

Теорема Шеннона для каналов без помех:

Шеннон показал, что при соответствующем выборе способа кодирования и любой избыточности источника сообщения принципиально возможно обеспечить скорость передачи информации без помех сколь угодно близкую к его пропускной способности.

Условием согласования источника сообщения с каналом является несоответствие скоростей формирования и получения символов, а соответствие их информационных характеристик.

__Теорема Шеннона:__ Если пропускная способность дискретного канала без помех превышает производительность источника

$V_к \log_2 m > V_и H(A)$, то существует способ кодирования и декодирования сообщений источника $H(A)$, обеспечивающий сколь угодно надежность отождествления принятых сообщений с действительным периодом.

Если пропускная способность канала меньше производительности источника: $V_к \log_2 m < V_и H(A)$, то такого способа нет.

__Доказательство:__ Последовательность состоит из символов алфавита объемом m, T - протяженность последовательности.

$A \longrightarrow B$
источник приемник

$T \cdot V_к$ - число полученных символов ($V_к$ - скорость передачи символов через канал)

$N(B) = m^{TV_к} = 2^{TV_к \log_2 m}$ - число принимаемых комбинаций.

В статистике есть понятие типичной последовательности. Типичная последовательность выдается стационарным источником и при $n \to \infty$ $\frac{n_{a_1}}{n_{a_2}} \to \frac{P_1}{P_2}\Big|_{n \to \infty}$ где P_1 - вер-ть появления символа a_1, P_2 - вер-ть появления символа a_2.

Пусть источник выдает типичные последовательности. $n = TV_и$

$N_{тип}(A) = 2^{T V_u H(A)}$

Пусть у нас $V_k \log_2 m = V_u H(A) + \varepsilon$

$\frac{N(B)}{N_{тип}(A)} = 2^{T\varepsilon} =$, $\varepsilon = \log_2 e^{1/T N_{тип}(A)}$ $\boxed{N(B) > N_{тип}(A) + 1}$

$= e^{1/N_{тип}(A)} = 1 + \frac{1}{N_{тип}(A)} + \frac{1}{2!(N_{тип}(A))^2} + \ldots$

Таким образом число различных кодовых комбинаций на единицу больше числа типичных последовательностей источника.

Одну избыточную комбинацию представим как нетипичную, тем самым предопределив ее недостоверную передачу.

$T \to \infty$, $n \to \infty$ $P_{HT} \to 0$ вероятность появления нетипичной посл-ти $\to 0$, ε – ε/n.

Обратная теорема доказывается от противного.

$N_{тип}(A) > N_B + 1$, то есть мы не можем передать и закодировать все типичные посл-ти даже при способе кодирования, обеспечивающем равную вер-ть передачи всех символов.

Следствия:

1) Оптимальное кодирование сводится к бесконечному удлинению кодовой комбинации, затем уравниванию вероятностей появления комбинаций и устранения корреляции между символами.

2) Максимально возможная пропускная способность достигается при оптимальном кодировании Шеннона $T \to \infty$, $n \to \infty$

Скорость передачи информации и пропускная способность дискретного канала при наличии помех.

При наличии помех скорость передачи информации через канал будет меньше среднего количества информации в единицу времени выдаваемую источником.

$P(a_j / a_j')$ — плотность распределения переданного символа a_j, при условии принятого символа a_j'

a_j - переданный символ

a_j' - принятый символ

$$H(B/b_j') = -\sum_{j=1}^{m} P(b_j/b_j') \log_2 P(b_j/b_j')$$

$$H(B/b_j') = -\sum_{i=1}^{m} P(b_i/b_j') \log_2 P(b_i/b_j')$$

Усредним по всем значениям b_j':

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} P(b_j') P(b_i/b_j') \log_2 P(b_i/b_j') =$$

$$= -\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} P(b_i, b_j') \log_2 P(b_i, b_j')$$ ← совместная вероятность появления входного символа b_i и выходного b_j'

К полученной формуле применим формулу Байеса и формулу для умножения вероятностей.

$$H(B/B') = -\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} \underbrace{P(b_i)}_{1} \underbrace{P(b_j'/b_i)}_{2} \log_2 \frac{P(b_i)P(b_j'/b_i)}{\sum_{i=1}^{m} P(b_i)P(b_j'/b_i)}$$

апостериорная энтропия; так же называется надежностью канала

Она определяется: 1) $P(b_i)$

2) $P(b_j'/b_i) = P_{ij}'$

$$I(B,B') = H(B) - H(B/B') = H(B) + \sum_{i,j}^{m,m} P(b_i, b_j') \log_2 P(b_i / b_j') =$$

$$= -\sum_{i=1}^{m} P(b_i) \log_2 P(b_i) + \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} P(b_i, b_j') \cdot \log_2 P(b_i, b_j') =$$

$$= -\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} P(b_i, b_j) \log_2 P(b_i) + \sum_{i,j=1}^{m,m} P(b_i, b_j) \log_2 \frac{P(b_i, b_j')}{P(b_j')} =$$

$$\boxed{= \sum_{i,j=1}^{m,m} P(b_i, b_j') \cdot \log_2 \frac{P(b_i, b_j')}{P(b_i)\, P(b_j')} = I(B/B')}$$

полностью симметричное относительно b_i, b_j', т.е. если их поменять местами не изменится.

$$I(B,B') = H(B) - H(B/B') = H(B') - H(B'/B)$$

Количество информации, которое в среднем несет символ выходного сообщения о состоянии входного сообщения и наоборот — одинаково,

Средняя скорость передачи информации по каналу с помехами

$$\frac{dI(B,B')}{dt} = V_k I(B,B') = V_k \left[H(B) + \sum_{i,j=1}^{m} P(b_i, b_j') \log_2 P(b_i, b_j') \right]$$

Под пропускной способностью дискретного канала с помехами также будем понимать предельную скорость передачи информации при заданных хар-ках канала.

$$C_k = V_k I_{max}(B,B') = V_k (\log_2 m - H(B/B'))$$

$$\left.\begin{aligned} P(b_i/b_j) &= 0, \quad i \neq j \\ &= 1, \quad i = j \end{aligned}\right\} \Rightarrow C_k = V_k \log_2 m$$

когда канал полностью забит помехой, пропускная способность = 0.

$$H(B/B') = -\sum_{i,j=1}^{m,m} \frac{1}{m} \log_2 \frac{1}{m} = \log_2 m$$

Пропускная способность канала при наличии помех меняется в пределах $0 \le C_k \le V_k \log_2 m$ (от 0 до максимального значения).

Основная теорема Шеннона для дискретного канала с помехами.

Для дискретного канала существует такой способ кодирования, при котором может быть обеспечена безошибочная передача информации, поступающей от источника, если только пропускная способность канала превышает производительность источника.

$$V_k [\log_2 m - H(B/B')] > V_u H(A)$$

Теорема Шеннона для канала с помехами также не указывает конкретного способа кодирования, обеспечивающего достоверную передачу информации со скоростью сколь угодно близкой к пропускной способности канала, лишь доказывает принципиальное существование такого кода.

$P_{ош} < 2^{-T[C_k - V_u H(A)]}$ вероятность ошибки

T — длительность кодовой комбинации посылки символов.

чем больше T, тем выше достоверность передачи.

чем выше запас по пропускной способности $[C_k - V_u H(A)]$ тем выше достоверность передачи информации.

Таким образом существует теоретическая возможность размена эффективности использования канала на достоверность связи.

Теорема Шеннона сыграла итоговую роль в становлении правильного воззрений на принципиальные возможности техники связи. Шеннон впервые показал, что существуют коды, обеспечивающие $P_{ош} \to 0$ при конечной скорости передачи информации.

Среднее количество информации, приходящееся на 1 символ:

$$H(B) = \frac{V_u \cdot H(A)}{V_K} = \frac{V_K [\log_2 m - H(B/B')]}{V_K} = \log_2 m - H(B/B')$$

коэф. избыточности входного сообщения

$$\beta_u = 1 - H(B)/\log_2 m = \frac{H(B/B')}{\log_2 m}$$

Для обеспечения достоверной передачи информации достаточно ввести избыточность, превышающую потерю информации из-за действия помех.

Основной смысл теоремы Шеннона сводится к следующему: пропускная способность дискретного канала - это по сути максимальная скорость передачи безизбыточного сообщения, то есть скорость поступления на вход канала предельного количества информации, которое может воспринять канал в единицу времени.

$C_{K_{max}} = V_K \log_2 m$ - без помех

$C_{K_{max}} = V_K \log_2 m - V_K H(B/B')$ - с помехами

Под пропускной способностью канала можно так же понимать предельную скорость достоверной передачи информации. На практике пропускная способность недостижима и технически нереализуема. Однако она может служить мерой сравнения для определения степени совершенства реальных систем.

Лекция 3. (20.09.06)

Пропускная способность непрерывного канала при наличии аддитивного шума.

Под пропускной способностью непрерывного канала будем понимать максимально возможную скорость передачи информации при заданных характеристиках в полосе пропускания отношения ОСШ.

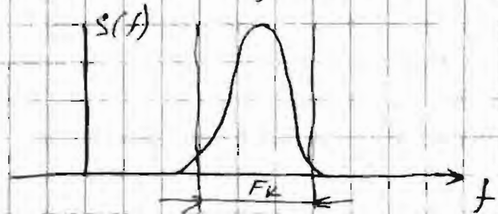
Как и в случае дискретных сигналов скорость передачи информации по непрерывному каналу зависит от ансамбля входных сигналов

Дискр		Непрерывн.
Энтропия	$\longleftrightarrow$	Дисперсия

Для того чтобы передавать максимум информации по непрерывному каналу, сигнал должен обладать максимальной дисперсией в пределах заданной спектральной полосы.

Наилучшим образом это выражается в сигналах с нормальным распределением.

Ограничимся рассмотрением сигналов с нулевым матожиданием и ... распределением.



$$\eta(t) = \xi(t) + n(t).$$

Fк – ширина полосы канала.

Дискретизируем сигнал по Котельникову

$$\eta(t) = \sum_i \eta_i \varphi_i(t)$$

Вычислим количество информации о текущем состоянии полезного сигнала $\varphi_i(t)$ после приема дискретного отсчета η_i

Это количество информации определяется разностью априорной и апостериорной энтропий.

$$I(\xi_i, \eta_i) = h(\eta_i) - h(\eta_i / \xi_i)$$

$$\sigma_\eta^2 = \sigma_\xi^2 + \sigma_n^2$$

квадрат дисперсии принимаемого сигнала – это сумма квадратов дисперсий полезного сигнала и шума.

$$h_{норм} = \log_2 \sqrt{2\pi e}\, \sigma$$

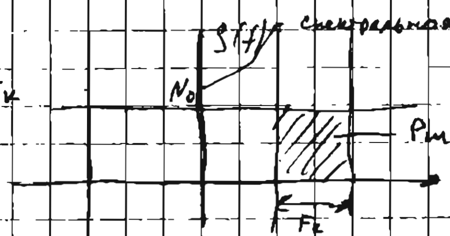
Тогда количество информации: $I(\xi_i, \eta_i) = \log_2 \left(\frac{\sigma_\eta}{\sigma_n}\right) = \log_2 \frac{\sqrt{\sigma_\xi^2 + \sigma_n^2}}{\sigma_n} =$

$$= \log_2 \sqrt{1 + \frac{\sigma_\xi^2}{\sigma_n^2}} = \log_2 \sqrt{1 + \frac{P_c}{P_ш}}.$$

$$C_к = \nu_к \frac{dI}{dt} = 2F_к \log_2 \sqrt{1 + \frac{P_c}{P_ш}} = \underbrace{F_к \log_2 \left(1 + \frac{P_c}{P_ш}\right)}_{\text{ф-ла Шеннона}},$$

$$\frac{P_c}{P_ш} \to 0 \Rightarrow C_к \to 0$$

Величина $1+\frac{P_c}{P_ш}$ характеризует количество уровней непрерывного сигнала, различимых на фоне шума при заданном ОСШ



$P_ш = N_0 \cdot F_к$

$$\Rightarrow C_к = F_к \cdot \log_2\left(1+\frac{P_c}{N_0 \cdot F_к}\right)$$

при $F_к \to \infty$ $\quad C_\infty = \lim_{F_к\to\infty} F_к \log_2\left(1+\frac{P_c}{N_0 F_к}\right) =$

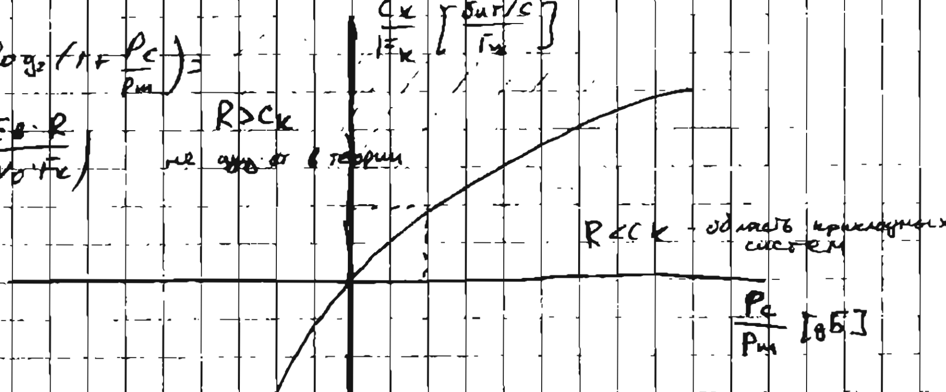
$$= \log_2 \lim_{F_к\to\infty}\left(1+\frac{P_c}{N_0 F_к}\right)^{F_к} = \frac{P_c}{N_0}\log_2 e$$

В результате пропускная способность канала стремится к фиксированной величине, определяемой отношением сигнал-шум.

Обмен мощности сигнала на ширину полосы спектра для обеспечения заданной пропускной способности возможен лишь в некоторых границах, за которыми расширение полосы пропускания фактически не дает никакого эффекта.

$$\frac{C_к}{F_к} = \log_2\left(1+\frac{P_c}{P_ш}\right) =$$

$$= \log_2\left(1+\frac{E_б \cdot R}{N_0 \cdot F_к}\right)$$



Предел Шеннона.

Существует нормированное соотношение сигнал-шум: $\frac{E_b}{N_0}$, при котором ни при какой скорости передачи инф-ии невозможно осуществить передачу информации.

$R = C_к$

$$\frac{C_к}{F_к} = \log_2\left[1 + \frac{E_b}{N_0}\left(\frac{C_к}{F_к}\right)\right] \Rightarrow 2^{\frac{C_к}{F_к}} = 1 + \frac{E_b}{N_0}\left(\frac{C_к}{F_к}\right) \Rightarrow \frac{E_b}{N_0} = \frac{F_к}{C_к}\left(2^{\frac{C_к}{F_к}} - 1\right)$$

считаем, что $F_к \to \infty$ $\quad C_к/F_к \to 0 \Rightarrow \frac{E_b}{N_0} = \frac{1}{\log_2 e} = -1{,}6$ дБ

эта величина называется пределом Шеннона, т.е. соотношение сигнал-шум, меньше которого безошибочная передача инф-ии невозможна

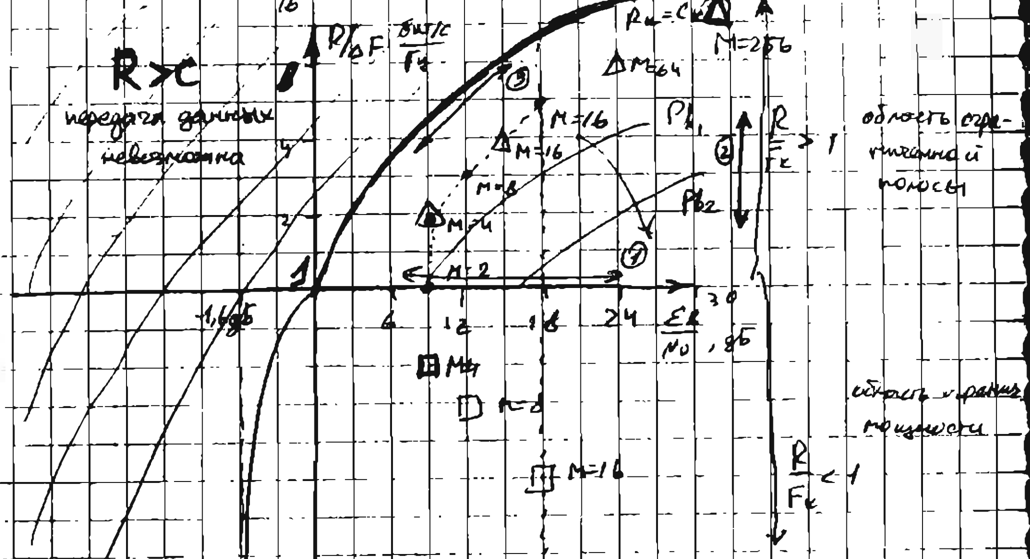
Плоскость „Полоса-эффективность".

$$\frac{C_к}{F_к} = \log_2\left[1 + \frac{E_b}{N_0}\left(\frac{C_к}{F_к}\right)\right]$$

$$\frac{R_к}{F_к}\left(\frac{E_b}{N_0}\right)$$

Плоскость „Полоса-эффективность" отображает эффективность использования ресурса полосы пропускания канала для различных систем связи

$\frac{R_к}{F_к}$ — это мера объема данных, которые нужно пропустить за единицу времени через единицу ширины полосы частот



• MPSK, $P_B = 10^{-5}$ М-арная фазовая ~~модуляция~~ манипуляция (модуляция с ограниченной полосой)
(М-ФМн) вероятность битовой ошибки
M - количество позиций при фазовой модуляции.

▷ Некогер MFSK (МЧМн)
□ М-арная частотная манипуляция/модуляция с ограниченной мощ-

△ MQAM (MКАМ)

P_{b_1}, P_{b_2} - вероятность битовой ошибки.

Движение от кривой P_{b_1} к P_{b_2} соответствует ● уменьшению вероятности битовой ошибки.

Линия ① отображает компромис между вероятностью битовой ошибки и отношению сигнал-шум при фиксированной эффективности использования полосы канала.

Линия ② отображает компромис между вероятностью битовой ошибки и шириной полосы пропускания ΔF и вероятностью битовой ошибки P_b. $\left(\frac{E_b}{N_0} = const\right)$

Линия ③ это компромисс между шириной полосы пропускания и отношением сигнал шум $\frac{E_b}{N_0}$ (P_B=const)

Сдвиг вдоль линии ① может быть вызван изменением отношения сигнал шум. В то время как сдвиг вдоль линии ② и ③ требует изменения техники модуляции и кодирования.

Для большинства систем связи один ресурс является дороже другого. В системах ограниченной мощности для экономии энергии за счет полосы пропускания можно использовать схемы кодирования, эффективно использующие мощность. Тогда как в системах ограниченной полосы можно применить эффективные методы модуляции, использующие полосу частот при увеличении расхода энергии.

Минимальная ширина полосы пропускания по Найквисту.

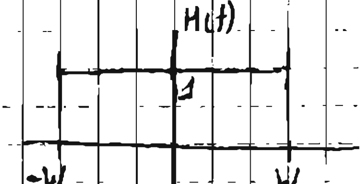
Межсимвольная интерференция (наложение одного сигнала на другой).

Если сигналы идут непрерывно, то из-за фронтов происходит наложение сигналов

Межсимвольная интерференция заключается в наложение одного импульса, соответствующего символу, на другие. Что в результате снижает рабочие характеристики системы обнаружения или демодуляции.

Пусть идеальный по полосе канал имеет огранич. характеристику

$H(f) = 1, \quad |f| < W = F_k$



$$x(t) = \int_{-W}^{W} X(f)\, e^{j2\pi f t}\, df$$

$X(f) = |G(f)|^2$ — импульсная хар-ка, которая соответствует фильтрующим свойствам канала.

$$r(t) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n h(t - nT) + z(t)$$

$z(t)$ — шумовая компонента

$r(t)$ — $x(t)$ + шум; I_n — n-ый интерференционный символ

Для демодуляции $r(t)$ будем применять согласованный фильтр с ЧХСФ $= H^*(f)$, $H(f) = F^{-1}\{h(t)\}$

$$\xrightarrow{r(t)} \boxed{\begin{matrix} \text{СФ} \\ H^*(f) \end{matrix}} \xrightarrow{y(t)}$$

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n x(t - nT) + n(t)$$

$n(t)$ — отклик согласованного фильтра на шумовую компоненту.

Дискретизируем сигнал $y(t)$ с частотой $1/T$.

$$t = kT + \tau_0$$

$$y(kT + \tau_0) \equiv y_k = \sum_{n=0}^{\infty} I_n x(kT - nT - \tau_0) + n(kT + \tau_0)$$

$$y_k = \sum_{n=0}^{\infty} I_n x_{k-n} + n_k, \quad k = 0, 1, \ldots$$

$$y_k = x_0 \Big(I_k + \frac{1}{x_0} \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq k}}^{\infty} I_n x_{k-n}\Big) + n_k$$

$$y_k = I_k + \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq k}}^{\infty} I_n x_{k-n} + n_k$$

Таким образом сигнал на выходе СФ будет складываться из 2-х компонент: желаемый информационный символ и интерференционный компонент.

Условия отсутствования межсимвольной интерференции будет записываться следующим образом

$$x(t)=x(kT)=x_k=\begin{cases}1, & k=0\\ 0, & k\neq 0\end{cases}$$

Теорема Найквиста, связывающая скорость передачи информации и ширину полосы пропускания: н. и д. условие отсутствия межсимвольной интерференции сводится к тому, чтобы преобразование Фурье удовлетворяло условию

$$x(f) \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(f+\frac{n}{T}\right) = T$$

$$x(t)=x(nt)=\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(f)e^{j2\pi f n T}\,df}_{\text{разобьем на интервалы}}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_{\frac{2m-1}{2T}}^{\frac{2m+1}{2T}} x(f)e^{j2\pi f n T}\,df=$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} X\left(f+\frac{m}{T}\right)e^{j\pi f n T}\,df=$$

Введем обозначение:

$$B(f)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} X\left(f+\frac{m}{T}\right)$$, тогда

периодическая величина с периодом $1/T$

$$=\int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} B(f)e^{j2\pi f n T}\,df$$

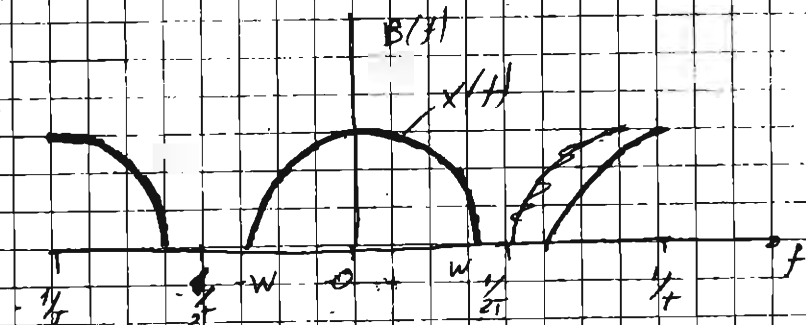
Функцию можно представить рядом Фурье:

$$B(f)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{j\pi f n T}, \quad b_n=T\int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} B(f)e^{-j2\pi f n T}=$$

$= T \cdot x(-nT)$

$$b_n = \begin{cases} T, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \qquad B(f) = T, \quad \sum_{m=-\infty}^{\infty} X\left(f + \frac{m}{T}\right) = T.$$

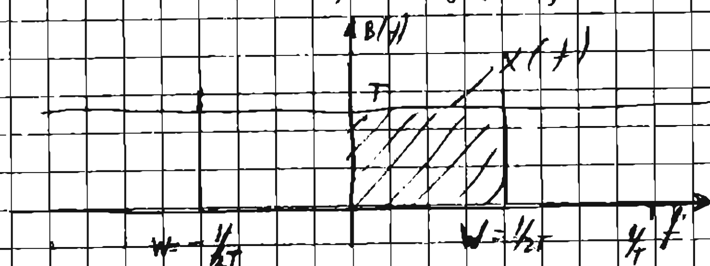
1) $T < \frac{1}{2W}$



не возможен выбор $X(f)$, $B(f) = T$.

2) $T = \frac{1}{2W}$ $\qquad B(f) = T$

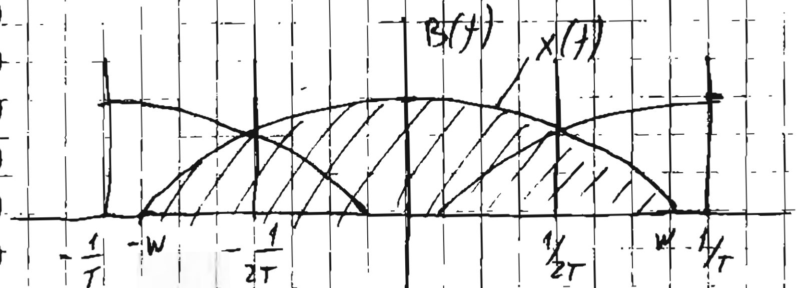
$$X(f) = \begin{cases} T, & |f| < W \\ 0, & \text{при других } f \end{cases}$$



$$x(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}$$

Минимальная длительность символа, при которой можно обеспечить передачу символов без интерференции $T = \frac{1}{2W}$

3) $T > \frac{1}{2W}$ В этом случае $B(f)$ состоит из перекрывающихся копий $X(f)$

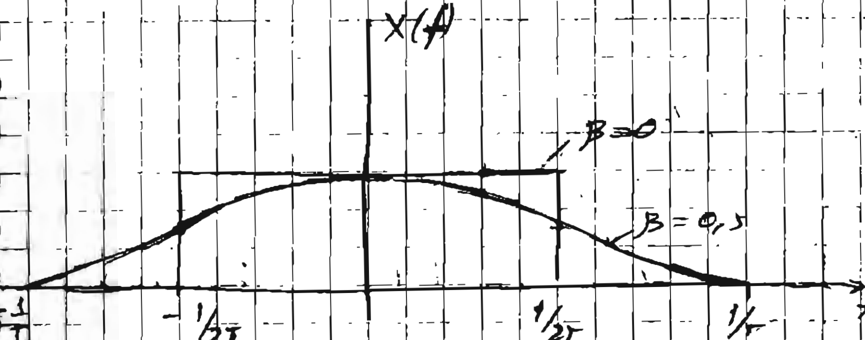


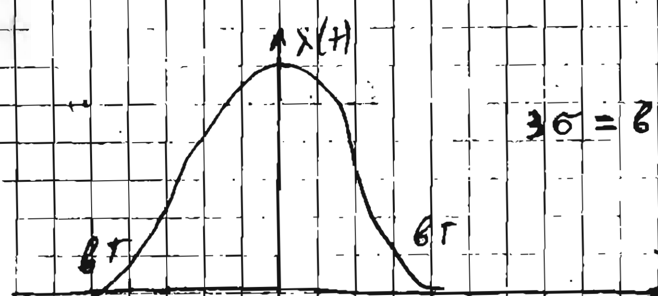
$R < 2W$

$B(f) \equiv T$

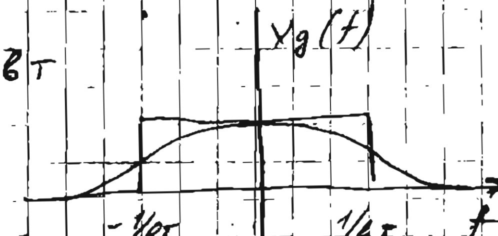
Пример: приподнятый косинус.

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi\beta t}{T}\right)}{1 - 4\beta^2 t^2/T^2} = x(t)$$

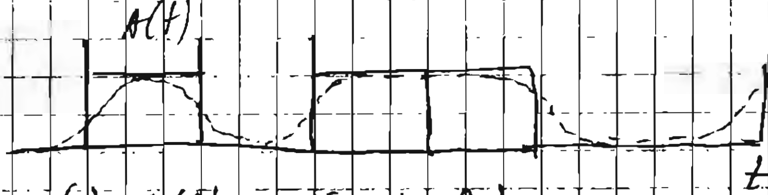




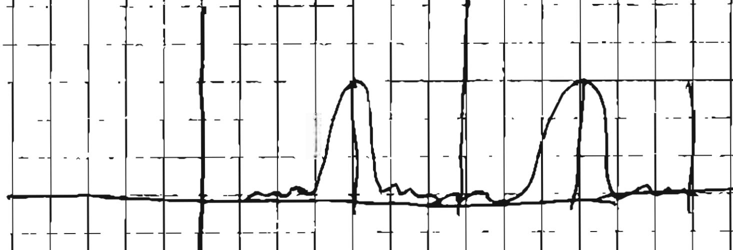
$3\sigma = 6T$



Спектр Гауссовского импульса



$$x(t) = A(t)\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

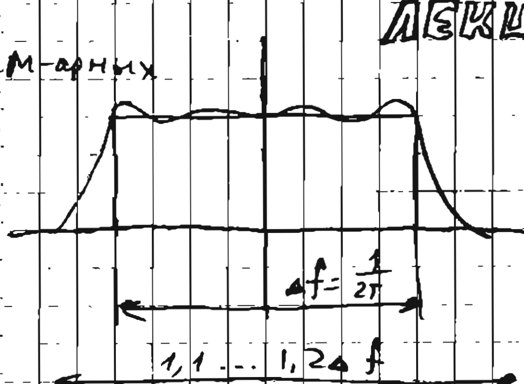


Спектр похож => пропускаем сигнал через Гауссовский фильтр.

В дальнейшем при передаче сигнала через канал будем под сигналом понимать последовательность сигнальных импульсов (которые обеспечивают наилучшую эффективность использования полосы)

ЛЕКЦИЯ 4. (27.09.06)

M-арных



k - бит

$M = 2^k$; $\underbrace{R}_{\text{скорость}} = k \cdot R_s$ $\qquad R_s$ при $k=2$

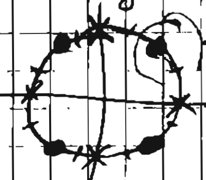
скорость передачи инф-ии увеличится в k раз.

$$\frac{R}{\Delta f} = \frac{R}{W} = \frac{R_s \log_2 M}{W} = \frac{\log_2 M}{W \cdot T_s}$$

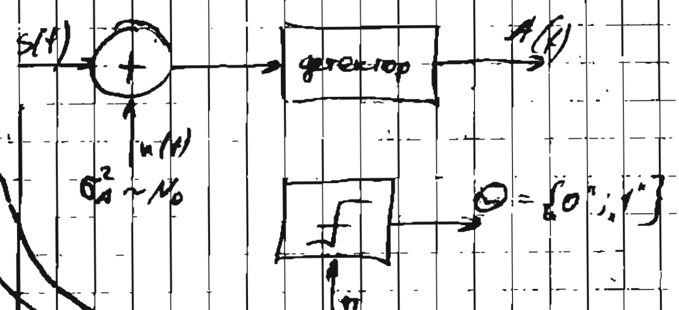
M - количество символов

=> При увеличении объема алфавита повышается эффективность использования полосы частот. Во сколько раз увеличивается объем алфавита во столько раз (под $\log_2$) увеличится эффективность полосы.

Чем больше алфавит, тем сложнее различать на уровне помехи соседние сигналы



— чем больше кол-во, тем менее различимы на фоне шума



→ вероятность пропуска (ошибки) сильно возрастает.

$P_{ош} = f(d)\uparrow \Rightarrow d^2 \uparrow \sim P_A$

$\Rightarrow$ ОСШ $\uparrow$

$= const \downarrow (\sigma^2 \downarrow) \Rightarrow N_0 \downarrow$

На простом примере показано, что увеличение эффективности использования полосы за счет увеличения объема алфавита целесообразно только при больших отношениях сигнал-шум.

При фиксированном отношении сигнал-шум (ОСШ) увеличение объема алфавита ведет к увеличению вероятности битовой ошибки.

Цифровая полосовая модуляция.

Полосовая модуляция – это изменение параметров несущей по заданному закону.

Цели, достигаемые модуляцией:

1) Согласование передаваемых сигналов с каналом передачи.
2) Частотно-временное разделение каналов.
3) Удовлетворение специфических технических требований, связанных

с обработкой сигналов (фильтрация и усиление).

Когерентные

- АМ (ASK)
- ЧМ (FSK)
- ФМ (PSK)
- Смеш. комб. - АМ (QAM, MSK, КАМ ММС
- Квадратурно/фазовая модуляция со сдвигом
- CPM (ММФ)

Некогерентные

- Отн фазовая (DPSK)
- ЧМ (FSK)
- АМ (ASK)
- Смешанные комбинации
- CPM

К когерентным схемам можно отнести те схемы, для восстановления исходных параметров сигнала которых необходимо получение инф-ии о фазе несущей частоты/несущего сигнала.

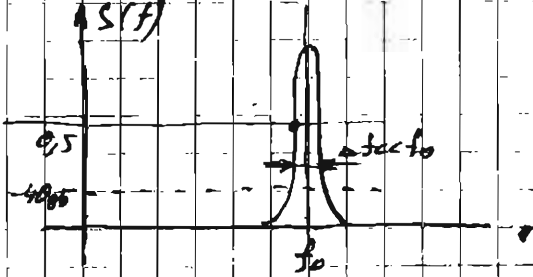
На практике используются как когерентные так и некогерентные схемы. 1-ые находят применение, где наибольшей важностью обладает вероятность битовой ошибки и эффективность использования канала передачи (т.к. использование когерентной демодуляции позволяет достичь выигрыша в отношении сигнал-шум.

Демодуляция QAM, PSK и MSK в некогерентных схемах принципиально не реализуется.

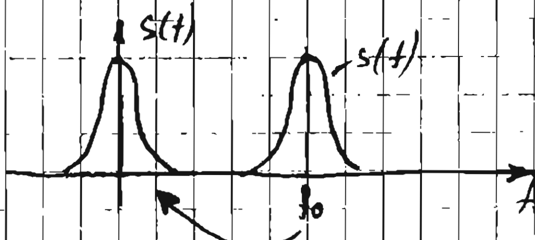
Когерентная демодуляция используется как правило в стационарных системах.

Некогерентные схемы используются тогда, когда необходимо восстановить пар-ры сигнала с наименьшими временными и аппаратными затратами. При этом потеря вероятности битовой ошибки допустима при приеме данных. Некогерентная демодуляция наиболее часто используется в мобильных системах связи.

Представление цифровых сигналов и систем.

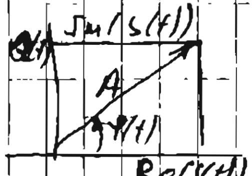


Для удобства математического описания все полосовые сигналы удобно представлять с помощью частотных эквивалентов. Подразумевается при этом преобразование частоты на нулевой частоте.
Как следствие качественные результаты различных способов модуляции и демодуляции не зависят от абсолютного значения несущей частоты.



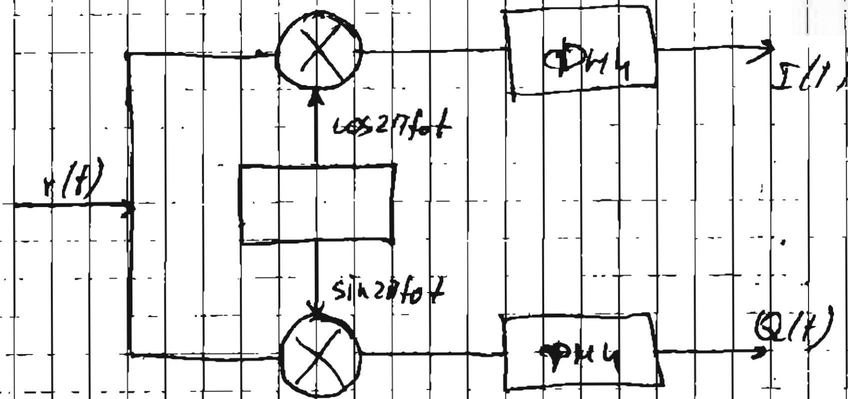
$$A^2(t) = I(t)^2 + Q^2(t)$$

$$\varphi(t) = \mathrm{arctg}\,\frac{Q(t)}{I(t)}$$



Перенос сигнала на нулевую частоту сопряжен с обязательным выделением его квадратурных компонентов.

Квадратурный демодулятор



Представление сигналов цифровой модуляции.

Различают 2 основных вида модуляции: модуляция с памятью, модуляция без памяти.

Без памяти – когда каждому символу из алфавита объемом M ставится в соответствие сигнал $S_m(t)$

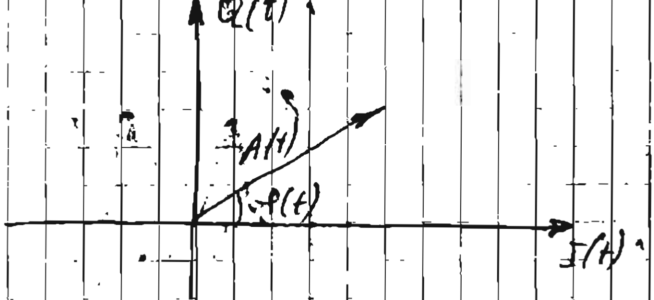
$k = \log_2 M$

$I_m \to S_m(t)$

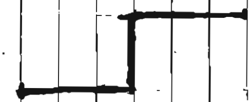
$1 \dots M \qquad S_1 \dots S_M$

Если выполняется соотношение $S_m(t) \leftarrow \{I_m, I_{m-1} \dots\}$ то модуляция с памятью. К ней относится ЧМ-модуляция с непрерывной фазой.

Методы модуляции без памяти.



АМ(АИМ)



$s(t) = \mathrm{Re}[A_m g(t) e^{j2\pi f_0 t}] = A_m \underline{g(t)} \cos 2\pi f_0 t$

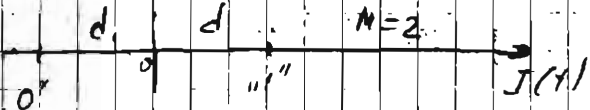
$g(t)$ — сигнальный импульс на нулевой частоте.

$m = \overline{1, M}$

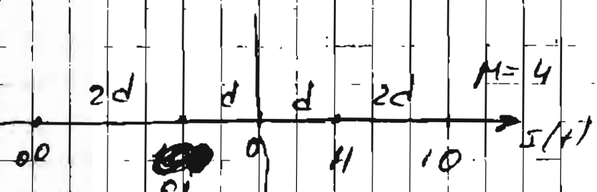
$0 \le t \le T$

$A_m = (2m-1-M)d$ — амплитуда $A_m \cdot g(t)$ — базовый видеосигнал

d — половина расстояния между соседними амплитудами



Кодировка Грея.

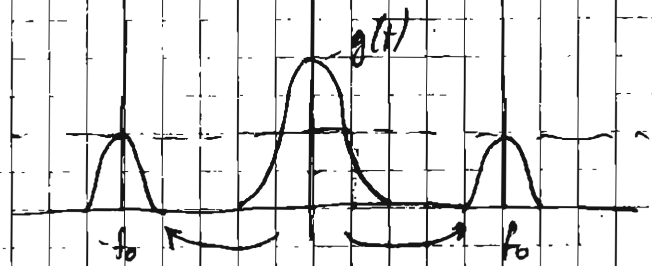


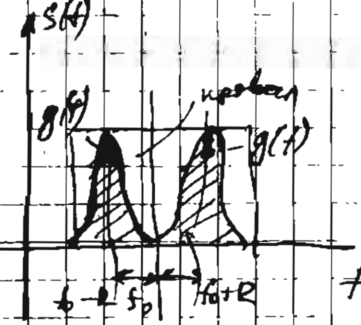
Старший бит показывает + или −, младший расстояние от 0.

В младшем бите ошибиться легче.

$R = \frac{1}{T_s} \log_2 M$ — скорость передачи информации

Недостаток АМ состоит в том, что сигнал является двухполосным и требует в 2 раза большую полосу.





Амплитудная модуляция использует канал связи неэффективно

$$\mathcal{E}_m = \int_0^T s_m^2(t)\,dt = \frac{1}{2}A_m^2 \int_0^T g^2(t)\,dt = \frac{1}{2}A_m^2 \mathcal{E}_g$$

энергия

Энергетические параметры АМ сигнала зависят только от величины амплитуды.

Сигналы фазовой модуляции

$$s(t) = \mathrm{Re}\left[g(t)\, e^{j2\pi\frac{m-1}{M}} e^{j2\pi f_0 t}\right] = g(t)\cos\frac{2\pi(m-1)}{M}\cos 2\pi f_0 t - g(t)\sin\frac{2\pi(m-1)}{M}\sin 2\pi f_0 t$$

фаза сигнала

$\Theta_m = \frac{2\pi(m-1)}{M}$, $m = 1 \ldots M$ принимает дискретные значения

$$\mathcal{E} = \int_0^T s^2(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^T g^2(t)\,dt = \frac{1}{2}\mathcal{E}_g$$

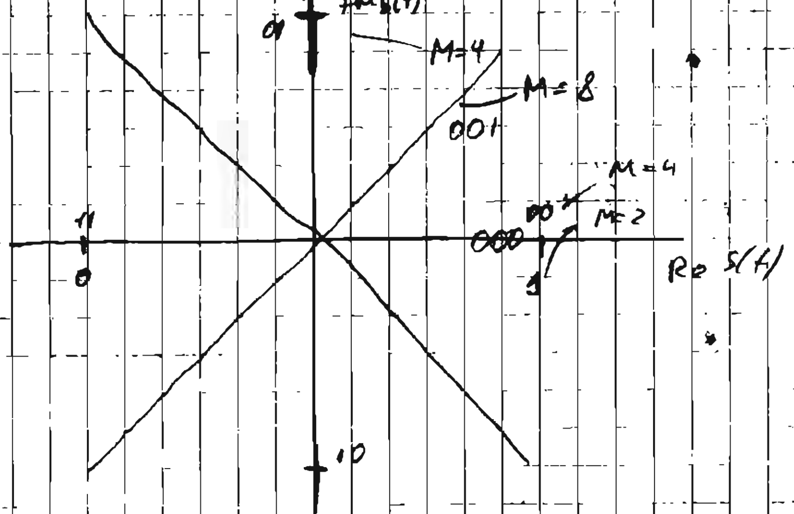
Энергия ФМ сигнала зависит только от амплитуды сигнального импульса. ~~и не зависит от~~

$$s(t) = s_1(t)\, f_1(t) + s_2(t)\, f_2(t)$$

квадратурные компоненты несущей частоты:

$$f_1(t) = g(t)\sqrt{\frac{2}{\mathcal{E}}}\cos 2\pi f_0 t$$

$$f_2(t) = g(t)\sqrt{\frac{2}{\mathcal{E}}}\sin 2\pi f_0 t$$



ФМ сигналы можно представить в виде суперпозиции 2-х АМ сигналов, разнесенных по фазе на 90°. Таким образом через ФМ канал при той же спектральной полосе и той же помехоустойчивости можно передавать инф-ию в два раза большей скоростью, чем в случае АМ.

Выигрыш ФМ достигается за счет увеличения энергии передаваемых сигналов.

КАМ (квадратурно-амплитудная модуляция)

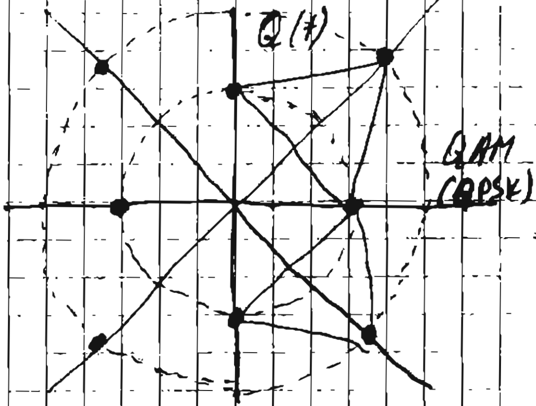
$$s(t) = \mathrm{Re}\left[g(t)(A_{mc} + jA_{ms})e^{j2\pi f_0 t}\right] = A_{mc}\,g(t)\cos 2\pi f_0 t -$$

$$- A_{ms}\,g(t)\sin 2\pi f_0 t$$

$m = \overline{1,M}$, $0 \le t \le T$

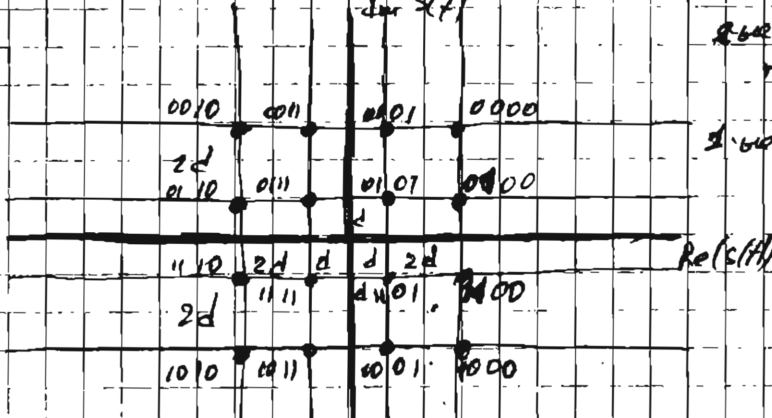
$$s_m(t) = \mathrm{Re}\left[V_m e^{j\theta_m} g(t) e^{j2\pi f_0 t}\right], \quad V_m^2 = A_{mc}^2 + A_{ms}^2; \; \theta_m = \mathrm{arctg}\frac{A_{ms}}{A_{mc}}$$

Квадратурно-амплитудная модуляция - это объединение амплитудной и фазовой модуляции.



QAM 256

Прямоугольная КАМ – 2-х мерная АМ



1ые 2 бита – положение по действительной оси.

2ые 2 бита – мнимой

QAM – наиболее применяемая модуляция для систем, где важна высокая скорость передачи информации. В каналах где низкий уровень помех.

Спектральные характеристики сигналов с цифровой модуляцией.

В большинстве систем радиосвязи полоса частот, предоставленная для передачи инф-ции – ограниченная.

При этом разработчик должен рассмотреть каким образом увеличение полосы частот влияет на параметры модулированных сигналов и осуществить вывод з-нов модуляции. Исходя из этого необходимо знать характеристики.

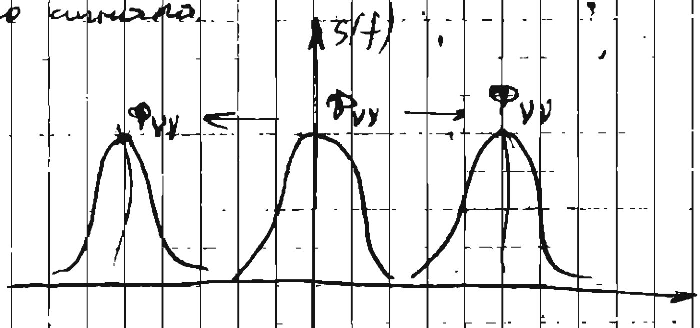
Спектральная плотность мощности линейной модуляции.

$$s(t) = Re\left[\underbrace{V(t)}_{A(t)g(t)} e^{j2\pi f_0 t}\right]$$

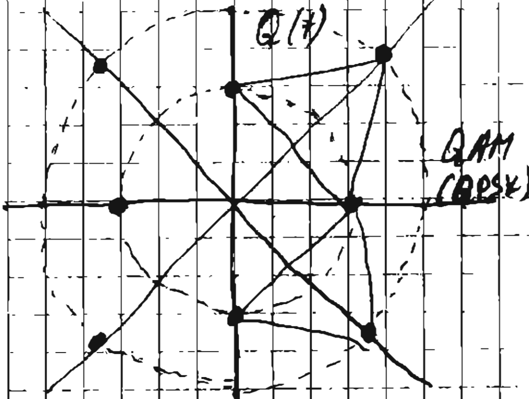
АКФ: $r_{ss}(\tau) = Re\left[R_{..} e^{j2\pi f_0 \tau}\right]$

$$S(f) = \frac{1}{2}\left[\Phi_{VV}(f-f_0) + \Phi_{VV}(f+f_0)\right]$$

Спектральная пл-ть мощности эквивалентного низкочастотного сигнала.

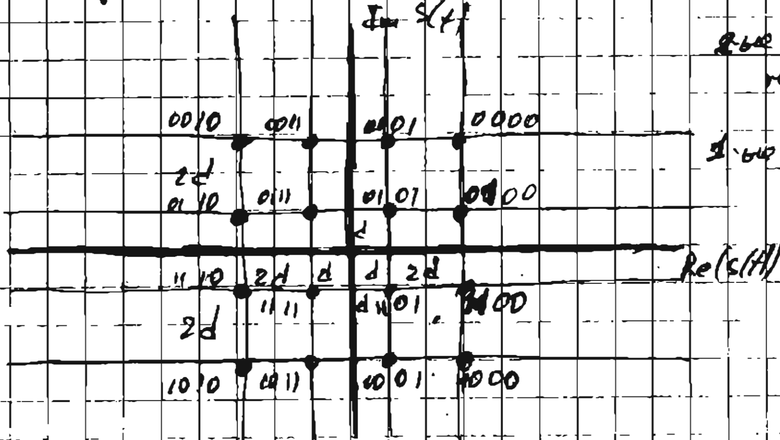


Для опр. спектральной пл-ти мощности полосового сигнала $S(f)$ достаточно определить АКФ СП М



QAM 256

Прямоугольная QAM – 2-х мерная AM



2-ые 2 бита – положение по действительной оси.

1-ые 2 бита – мнимой

QAM – наиболее применяемая модуляция для систем, где важна высокая скорость передачи информации. в каналах где низкий уровень помех.

Спектральные характеристики сигналов с цифровой модуляцией

В большинстве систем радиосвязи полоса частот, предоставленная для передачи инф-ии – ограниченная.

При этом разработчик должен рассмотреть каким образом увеличение полосы частот влияет на параметры модулированных сигналов и осуществить вывод з-нов модуляции. Исходя из этого необходимо знать характеристики.

Спектральная плотность мощности линейной модуляции

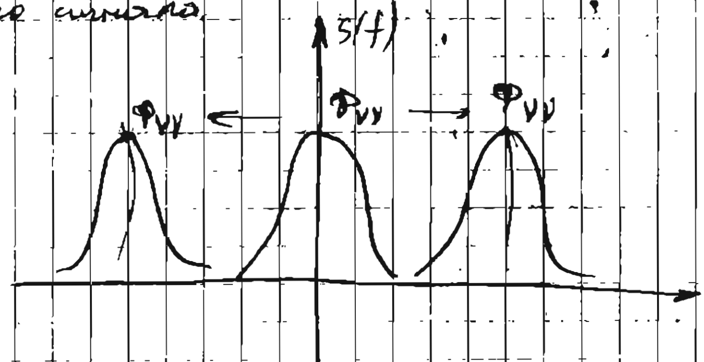
$$s(t) = Re\left[\underbrace{V(t)}_{A(t)g(t)} e^{j2\pi f_0 t}\right]$$

АКФ: $r_{ss}(\tau) = Re\left[r_{vv} e^{j2\pi f_0 \tau}\right]$

$$\downarrow$$

$$S(f) = \frac{1}{2}\left[\Phi_{VV}(f-f_0) + \Phi_{VV}(f+f_0)\right]$$

Спектральная пл-ть мощности эквивалентного низкочастотного сигнала.



Для опр. спектральной пл-ти мощности полосового сигнала $S(f)$ достаточно определить АКФ СПМ

$$v(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n\, g(t-nT)$$

$I_n=\{0,1\}$ — информационный символ

$$r_{vv}(t)=\frac{1}{2}E[v^*(t)\,v(t+\tau)]=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}E[I_n^* I_m]\, g^*(t-nT)\, g(t+\tau-mT)$$

предположим, что $\{I_n\}$ — стационарная посл-ть в широком смысле

$$\mu_i=E\{I_n\}$$

$$r_{ii}(m)=\frac{1}{2}E[I_n^*\, I_{n+m}]$$

— автокорреляционная ф-ия

$$r_{vv}(t+\tau,t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} r_{ii}(m-n)\, g^*(t-nT)\, g(t+\tau-mT)=$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty} r_{ii}(m)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\underbrace{g^*(t-nT)\, g(t+\tau-nT-mT)}_{\text{периодическая величина с периодом } T}$$

т.е. r_{vv} тоже периодическая с периодом T.

$$r_{vv}(t+\tau,t)=r_{vv}(t+\tau+T,\,t+T)$$

Среднее значение:

$$E(v(t))=\mu_i\sum_{n=-\infty}^{\infty} g(t-nT)\ \to\ \text{периодическое с периодом } T.$$

Такой сигнал называется циклостационарным.

Для того, чтобы рассчитать энергетическую СП необходимо исключить зависимость от ~~времени~~ ~~его~~ автокорреляционн ф-ии.

Усредним АКФ по периоду

$$\overline{r_{vv}}(t) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} r_{vv}(t+\tau, t)\,dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_{ii}(m) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g^*(t-nT)\,\times$$

$$\times\, g(t+\tau-nT-mT)\,dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_{ii}(m) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}-nT}^{\frac{T}{2}-nT} g^*(t)\,g(t+\tau-mT)\,dt$$

меняем местами

$$\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\frac{T}{2}-nT}^{\frac{T}{2}-nT} g^*(t)\,g(t+\tau-mT)\,dt$$ — АКФ $g(t)$ усредненное по n периодам

$$\| \quad r_{gg}(t)$$

Таким образом $r_{gg}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g^*(t)\,g(t+\tau)\,dt$.

$$\overline{r_{vv}}(\tau) = \frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty} r_{ii}(m)\, r_{gg}(\tau-mT)$$

СПМ $v(t)$: $\quad S_{vv}(f) = \frac{1}{T}\,|G(f)|^2\, S_{ii}(f)$

$G(f) = F(g(t))$ пр-ие Фурье

$S_{ii}(f) = F\{ I\{n\} \}$

$$S_{ii}(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_{ii}(m)\, e^{-j2\pi f m T}$$

Таким образом спектральная пл-ть мощности эквивалентного НЧ сигнала определяется спектром мощности сигнального импульса и спектром информационной посл-ти

$$J_n \longrightarrow \boxed{|G^2(f)|} \longrightarrow V(t)$$

Для получения эквивалентного НЧ сигнала, модулированного сигнальным импульсом на практике используется формирующий фильтр с АЧХ равной квадрату спектра сигнального импульса

ЛЕКЦИЯ 5 (04.10.06)

$$S_W(f) = \frac{1}{T}|G(f)|^2 |S_{ii}(f)|$$

$$S_{ii}(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \boxed{V_{ii}(m)}\, e^{-j2\pi f m T}$$

Исследуем зависимость спектральных свойств эквивалентного НЧ сигнала от статистических свойств информационной послед-ти

$f = \frac{1}{T}$ $\quad m=-\infty$

$$V_{ii}(m) = T\int_{-T/2}^{T/2} S_{ii}(f)\, e^{j2\pi f m T}\, df$$

Рассмотрим частный случай, когда последовательность вещественная и ее символы некоррелированы.

$$V_{ii}(m) = \begin{cases} \sigma_i^2 + \mu_i^2, & m=0 \\ \mu_i^2, & m \neq 0 \end{cases}$$

$S_{ii}(f) = \sigma_i^2 + \mu_i^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi m f T}$ сумма выражающая ... периодическая ф-ия. Она может быть представлена в виде ряда Фурье с периодом по частоте $1/T$

$$S_{ii}(f) = \sigma_i^2 + \mu_i^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{m}{T}\right)$$

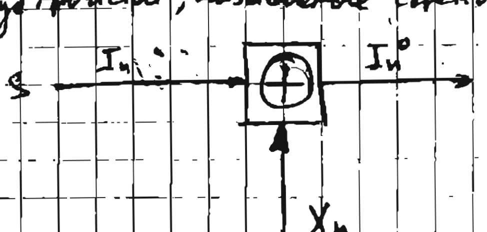
$$S_{vv} = \frac{\sigma_i^2}{T}\left|G(f)\right|^2 + \frac{\mu_i^2}{T^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left|G\left(\frac{m}{T}\right)\right|^2 \delta\left(f - \frac{m}{T}\right)$$

Искомый спектр состоит из 2-х компонентов: 1-ая компонента - непрерывная ф-ия, зависящая от формы сигнального импульса; 2-ая компонента - компонента состоящая из бесконечного набора δ-функций, с мощностью, пропорциональной квадрату среднего значения пос-ти.

Для достижения высокой спектральной эффективности использования канала связи, модулирующая последовательность должна содержать независимые и центрированные символы.

Для того, чтобы из детерминированных сигналов получить

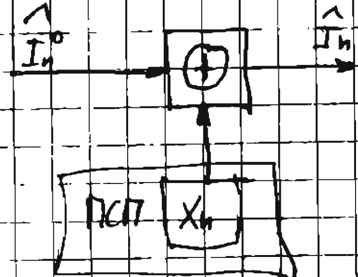
Для достижения указанных целей на практике, используются устройства, называемые скремблерами.



Случайные последовательности при использовании операции скремблирования хорошо выравнивают спектр информационного сигнала.

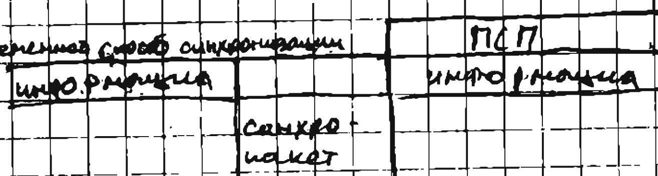
$$I_n^0 = I_n \oplus X_n$$

$$T_{X_n} >> T$$



Основной недостаток такого подхода заключается в необходимости синхронизации генератора ПСП на передающей и приемной сторонах.

1) Временной способ синхронизации



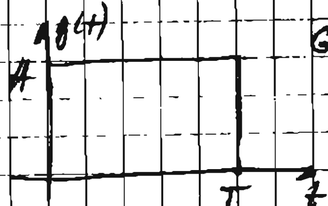
2) Частотный способ: предполагается наличие дополнительных частотных каналов, отвечающих только за синхронизацию.

Какой бы способ не использовался, он влечет за собой дополнительную потерю энергии либо снижение скорости передачи в обмен на повышение достоверности передачи инф-ии.

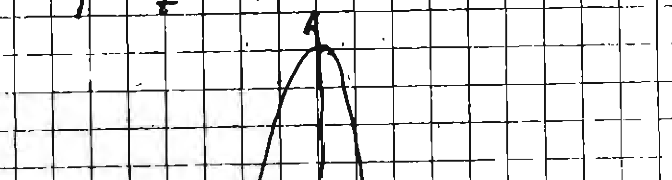
1) Сигнал с прямоугольным сигнальным импульсом.

Его спектр: $G(f) = A \cdot T \frac{\sin \pi f T}{\pi f T} e^{-j 2\pi f T}$,

$|G(f)|^2 = (AT)^2 \frac{\sin^2 \pi f T}{(\pi f T)^2}$; $G(f) = 0,\ f = \frac{m}{T},\ m \neq 0$

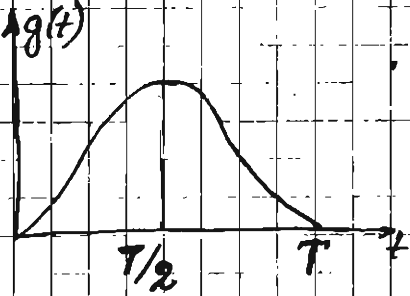


$$S_{vv} = \sigma_i^2 A^2 T \left(\frac{\sin \pi f T}{\pi f T}\right)^2 + A^2 \mu_i^2 \delta(f)$$



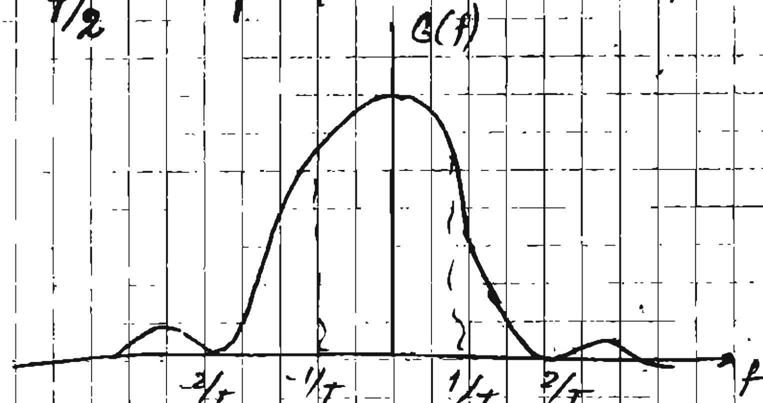
2) Сигнал приподнятого cos.

$$g(t) = \frac{1}{2}\left[1+\cos\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{T}{2}\right)\right], \quad 0\le t\le T$$



$$G(f) = \frac{T}{2}\,\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T(1-f^2T^2)}\, e^{-j\pi f T}$$

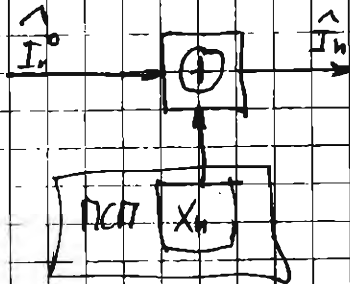
дискретные компоненты в спектре импульса приподнятого cos отсутствуют кроме $f=0$; $f=\pm\frac{1}{T}$



По сравнению со спектром прямоугольного импульса спектр приподнятого cos имеет более широкий и плавный главный лепесток. Однако амплитуда боковых составляющих уменьшается быстрее с ↑ частоты

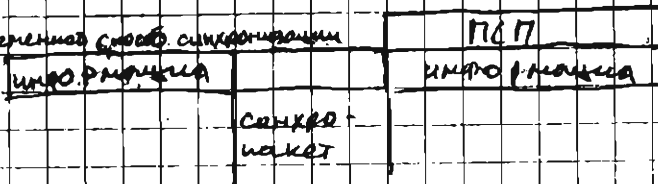
Основы демодуляции линейно-модулированных сигналов.

Демодуляция - это процесс извлечения исходной битовой инф-ии из принимаемого сигнала



Основной недостаток такого подхода заключается в необходимости синхронизации генератора ПСП на передающей и приемной сторонах.

1) Временной способ синхронизации

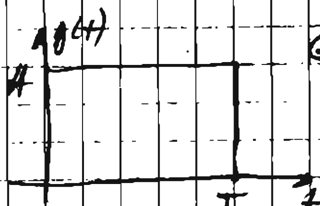


2) Частотный способ: предполагается наличие дополнительных частотных каналов, отвечающих только за синхронизацию.

Какой бы способ не использовался, он влечет за собой дополнительную потерю энергии либо снижение скорости передачи в обмен на повышение достоверности передачи инф-ии.

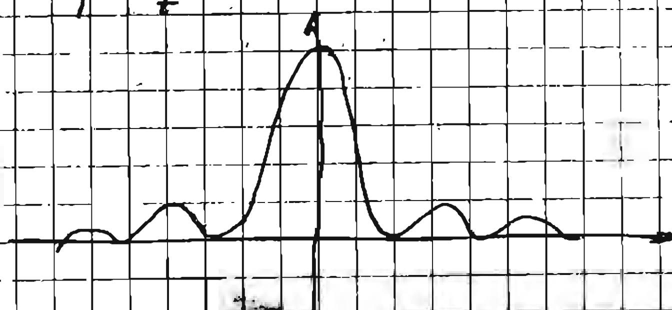
1) Сигнал с прямоугольным сигнальным импульсом

Его спектр: $G(f) = A \cdot T \frac{\sin \pi f T}{\pi f T} e^{-j 2\pi f T}$



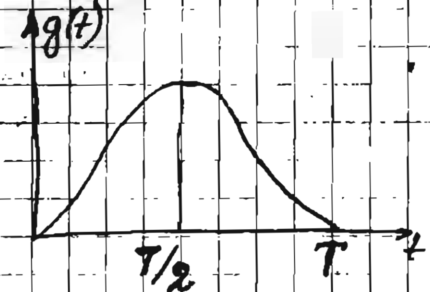
$$|G(f)|^2 = (AT)^2 \frac{\sin^2 \pi f T}{(\pi f T)^2}; \quad G(f)=0, \ f=\frac{1}{T}n, \ n\neq 0$$

$$S_{vv} = \sigma_i^2 A^2 T \left(\frac{\sin \pi f T}{\pi f T}\right)^2 + A^2 \mu_i^2 \delta(f)$$



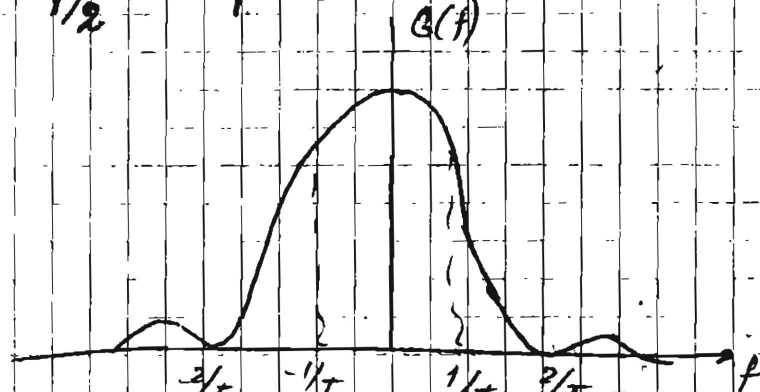
2) Сигнал приподнятого cos.

$$g(t) = \frac{1}{2}\left[1 + \cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{T}{2}\right)\right], \quad 0 \le t \le T$$



$$G(f) = \frac{T}{2}\cdot\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T(1 - f^2T^2)}\, e^{-j\pi f T}$$

дискретные компоненты в спектре импульса приподнятого cos отсутствуют кроме $f = 0$; $f = \pm\frac{1}{T}$

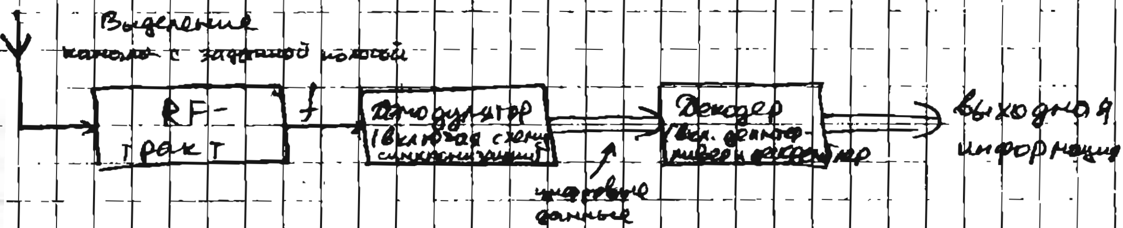


По сравнению со спектром прямоугольного импульса спектр приподнятого cos имеет более широкий и плавный главный лепесток. Однако амплитуда боковых составляющих уменьшается быстрее с ↑ частоты

Основы демодуляции линейно-модулированных сигналов.

Демодуляция - это процесс извлечения исходной битовой инф-ии из принимаемого сигнала

Схема цифрового модулятора:



Векторное представление сигналов и помех в цифровых системах связи.

При векторном представлении пр-во сигналов отображается в пространство векторов.

$$x_1(t),\ x_2(t)$$

$$\langle x_1(t), x_2(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)\cdot x_2^*(t)\,dt$$

сигналы ортогональны, если скалярное произведение равно 0.

$$\|x(t)\| = \langle x(t), x(t)\rangle = \left[\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\,dt\right]^{1/2}$$

$$\|x_1(t) + x_2(t)\| \leq \|x_1(t)\| + \|x_2(t)\|$$

$$\left\|\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)\, x_2^*(t)\,dt\right\| \leq \left\|\int_{-\infty}^{\infty} |x_1(t)|^2\,dt\right\|^{1/2} \times \left\|\int_{-\infty}^{\infty} |x_2(t)|^2\,dt\right.$$

Ортогональное разложение сигналов.

$$s(t):\ E = \int_{-\infty}^{\infty} [s^2(t)]\,dt < \infty$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)\cdot f_m(t) = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases}$$

ансамбль ортонормированных функций

$$\hat{S}(t) = \sum_{k=1}^{K} S_k f_k(t) \qquad S_k \text{ - коэф. разложения}$$

$$E_e = \int_{-\infty}^{\infty} [S(t) - \hat{S}(t)]^2 dt \longrightarrow \min$$

Для вычисления коэффициентов разложения воспользуемся методом наименьших квадратов.

$$E_e = \int_{-\infty}^{\infty} [S(t) - \sum_{k=1}^{K} S_k f_k(t)]^2 dt$$

Коэф. разложения можно найти путем дифф. обоих частей E_e

$$\frac{\partial E_e}{\partial S_k} = 0, \quad k = \overline{1,K}.$$

Другой способ заключается в использовании критерия минимума среднего квадрата ошибки.

$$\int_{-\infty}^{\infty} [S(t) - \sum_{k=1}^{K} S_k f_k(t)] \cdot f_n(t)\, dt = 0$$

$$S_k = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) f_k(t)\, dt$$

таким образом коэф. разложения S_k это проекция сигнала $S(t)$ на базисную ф-цию $f_k(t)$.

Примеры:

1) Разложение по Котельникову:

$$S(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} S_k f_k(t), \quad f_k(t) \to \frac{\sin At}{At}$$

г) Разложение в ряд Фурье.

$$s(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\frac{2\pi k t}{T} + b_k \sin\frac{2\pi k t}{T} \right)$$

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T s(t) \cos\frac{2\pi k t}{T}\, dt$$

$$b_k = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T s(t) \sin\frac{2\pi k t}{T}\, dt$$

$$f_k = \left\{ \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\frac{2\pi k t}{T};\ \sqrt{\frac{2}{T}} \sin\frac{2\pi k t}{T} \right\}$$

Какой бы базис не выбирался, для базисных ф-ций должны выполняться условия нормировки и ортогональности. Задача разработчика демодулятора состоит в выборе этого базиса чтобы максимально упростить демодуляцию сигнала алгоритмически и технически.

Меры скорости сигналов.

в) Коэффициент взаимной корреляции

$s_m(t),\ s_k(t)$

$$\rho_{km} = \frac{1}{2\sqrt{E_m E_k}} \int_{-\infty}^{\infty} s_m^*(t)\, s_k(t)\, dt$$

$$E_{m,k} = \int_{-\infty}^{\infty} |s_{m,k}|^2\, dt$$

$$R(\rho_{km}) = \frac{1}{\sqrt{E_m E_k}} \int_{-\infty}^{\infty} s_m(t)\, s_k(t)\, dt = \frac{s_m s_k}{\|s_m\| \cdot \|s_k\|}$$

ческая ф-ия. Она может быть представлена в виде ряда Фурье с периодом по частоте $1/T$

$$S_{ii}(f) = \sigma_i^2 + M_i^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{m}{T}\right)$$

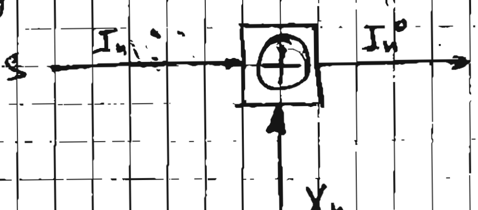
$$S_{VV} = \frac{\sigma_i^2}{T}\left|G(f)\right|^2 + \frac{M_i^2}{T^2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left|G\left(\frac{m}{T}\right)\right|^2 \delta\left(f-\frac{m}{T}\right)$$

Искомый спектр состоит из 2-х компонентов: 1-ая компонента – непрерывная ф-ия, зависящая от формы сигнального импульса; 2-ая компонента – компонента состоящая из бесконечного набора δ-функций, с мощностью, пропорциональной квадрату среднего значения пос-ти.

Для достижения высокой спектральной эффективности использования канала связи, модулирующая последовательность должна содержать независимые и центрированные символы.

Для того, чтобы из детерминированных сигналов получить

Для достижения указанных целей на практике, используются устройства, называемые скремблерами.



Случайные последовательности при использовании операции скремблирования хорошо выравнивают спектр информационного сигнала.

$$I_n^0 = I_n \oplus X_n$$

$$T_{X_n} >> T$$