т.к. $\operatorname{div} \dot{\bar{E}}_m = 0$ {по ${}^{\text{III}}$} $\Rightarrow \operatorname{grad}(\operatorname{div} \dot{\bar{E}}_m) = 0$,

т.о. $\cancel{-\nabla^2 \dot{\bar{E}}_m = \omega^2 \mu_a \dot{\varepsilon}_a}$ $\nabla^2 \dot{\bar{E}}_m + \omega^2 \mu_a \dot{\varepsilon}_a \dot{\bar{E}}_m = 0$ (15).

обозначим $\dot{\gamma}^2 = -\omega^2 \mu_a \dot{\varepsilon}_a$ (16)

$\dot{\gamma}$ - коэф. распространения

$\dot{\gamma} = \alpha + j\beta$ (4 семинар.)

α - коэф. ослабления, ~~коэ~~ β - коэф. фазы.

т.о. $\nabla^2 \dot{\bar{E}}_m - \dot{\gamma}^2 \dot{\bar{E}}_m = 0$ (17) {= (1) в след. лекции}

(17) - векторное однородное уравнение Гельмгольца

30.10 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - лапласиан

Если φ - скалярное поле, т.е. $\varphi = \varphi(\bar{R})$

$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$

(1) - сост. сист. ур-ний Гельмгольца в координатной форме.

$(\nabla^2 \dot{E}_{mx})\bar{i}_x + (\nabla^2 \dot{E}_{my})\bar{i}_y + (\nabla^2 \dot{E}_{mz})\bar{i}_z - \dot{\gamma}^2(\dot{E}_{mx}\bar{i}_x + \dot{E}_{my}\bar{i}_y + \dot{E}_{mz}\bar{i}_z) \Rightarrow$

имеем:

$$\cancel{\frac{\partial^2 \dot{E}_{mx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_{my}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_{mz}}{\partial z^2}}$$

$$\cancel{\frac{\partial^2 \dot{E}_{my}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_{my}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_{mz}}{\partial z^2}}$$

$$\cancel{\frac{\partial^2 \dot{E}_{mz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_{my}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_{mz}}{\partial z^2}}$$

$$(2)\begin{cases} \frac{\partial^2 \dot{E}_{mz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_{mz}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_{mz}}{\partial z^2} - \dot{\gamma}^2 \dot{E}_{mz} = 0 \\ \frac{\partial^2 \dot{E}_{my}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_{my}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_{my}}{\partial z^2} - \dot{\gamma}^2 \dot{E}_{my} = 0 \\ \frac{\partial^2 \dot{E}_{mx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_{mx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_{mx}}{\partial z^2} - \dot{\gamma}^2 \dot{E}_{mx} = 0 \end{cases}$$

Ограничимся простейшим случаем.

т.е. $\dot{E}_{my} = \dot{E}_{mz} = 0$

$$\dot{E}_{mx} = \dot{E}_{mx}(z)$$

$$\frac{\partial \dot{E}_{my}}{\partial x} = \frac{\partial \dot{E}_{my}}{\partial y} = 0$$

т.о. $$\frac{\partial^2 \dot{E}_{mx}}{\partial z^2} - \dot{\gamma}^2 \dot{E}_{mx} = 0 \quad (3)$$

решение (3) запис. в виде: $\dot{E}_{mx} = \dot{E}_{m1} e^{\dot{\gamma}_1 z} + \dot{E}_{m2} e^{\dot{\gamma}_2 z}$ (4)

$\dot{\gamma}_{1,2} = \sqrt{\dot{\gamma}^2}$

Рассмотрим подробнее $\dot{\gamma}_1$ и $\dot{\gamma}_2$

$\dot{\gamma}^2 = -\omega^2 \dot{\varepsilon}_a \mu_a$ (5) - приняго ранее

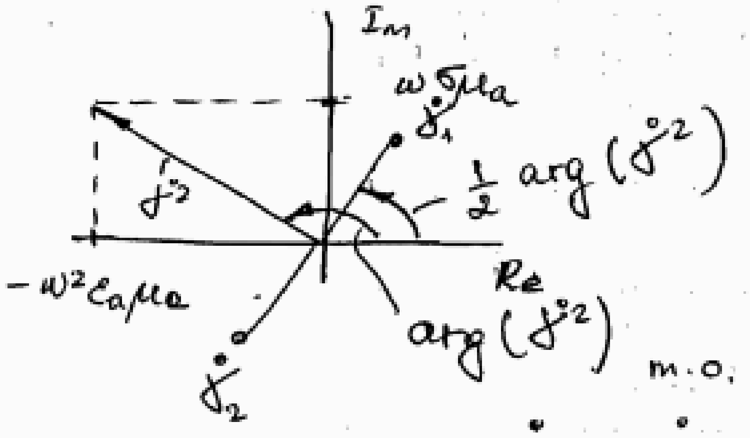
$\dot{\varepsilon}_a = \varepsilon_a - j\frac{\sigma}{\omega}$ (6)

$\dot{\gamma}^2 = -\omega^2 \varepsilon_a \mu_a + j\omega\sigma\mu_a$ (7)

Изобразим (7) на компл. пл-ти.

$\mathrm{Re}\,\dot{\gamma}^2 = -\omega^2\varepsilon_a\mu_a < 0$

$\mathrm{Im}\,\dot{\gamma}^2 = \omega\sigma\mu_a > 0$



$= \rho e^{j\frac{\theta}{2}}$

$\dot{\gamma}_1 = \dot{\gamma} = \rho e^{j\varphi_0}$

$\dot{\gamma}_2 = \rho e^{j(\frac{\theta}{2}+\pi)} = \rho e^{j\varphi_0} e^{j\pi} = -\dot{\gamma}$

т.о. для (4) можно записать:

$$\dot{E}_{mx} = \dot{E}_{m1} e^{\dot{\gamma} z} + \dot{E}_{m2} e^{-\dot{\gamma} z} \quad (8)$$

В конце 4-го семинара показано, что $\dot{\gamma} = \alpha + j\beta$, тогда видим, что (8) представл. собой сумму 2-х волн из к-рых 1-ая хар-ет э/м волну распростр. в сторону отриц. z, а другая в сторону положительных z.

$\dot{z} = z \cdot e^{j\theta}$

$\dot{\omega} = \sqrt{\dot{z}}$

$\dot{\omega} = \rho \cdot e^{j\varphi}$

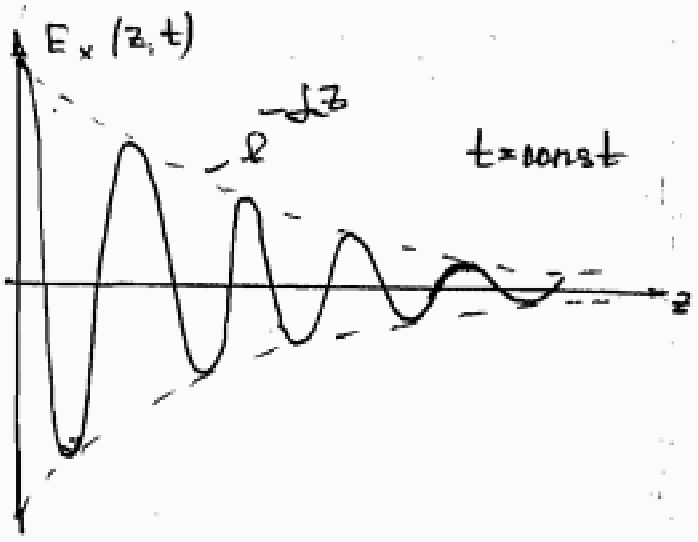
т.к. $\dot{\omega}^2 = \dot{z}$

т.о. $(\rho \cdot e^{j\varphi})^2 = \rho^2 e^{j2\varphi} = z \cdot e^{j\theta}$

т.о. $\rho = \sqrt{z}$

$2\varphi_k = \theta + 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1 \dots \qquad \varphi_0 = \frac{\theta}{2}; \; \varphi_1 = \frac{\theta}{2} + \pi$

решений бесконечно много, но только 2 различны



т.о. (8) – суперпозиция 2-х волн.
Объяснение графика см. в семинаре 4.

Рассмотрим слагаемое, распростран. в сторону положительного значения z

$$\dot{\bar E}_m = \dot E_{mx}(z)\,\bar i_x = E_m e^{-\dot\gamma z}\,\bar i_x \quad (10)$$

$$\bar E(z,t) = E_m e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z + \varphi_0)\,\bar i_x \quad (11) \;-$$

– веществ. сигнал, соотв. (10)

из (11) $\Rightarrow \forall z,t:\ \bar E(z,t) \parallel \bar i_x \quad (12)$

(12) $\Rightarrow$ $\bar E(z,t)$ параллелен $\bar i_x$ в любой момент, т.е. $\bar E(z,t)$ наход. в пл-ти XOZ и $\perp$-рен оси OZ

Для док-ва $\perp$-ти: $\bar E(z,t)\cdot\bar i_z = E_m e^{-\alpha z}\cos(\omega t-\beta z+\varphi_0)\,\overset{0}{\bar i_x\cdot\bar i_z} = 0$
В любой точке z $\bar E(z,t) \perp$ оси OZ, т.е. $\parallel$-ен OX.

Найдем $\dot{\bar H}_m$ комплексного векторного поля

II $\quad \mathrm{rot}\,\dot{\bar E}_m = -j\omega\mu_a\dot{\bar H}_m$

$$\dot{\bar H}_m = \frac{j}{\omega\mu_a}\,\mathrm{rot}\,\dot{\bar E}_m \quad (13)$$

$$\mathrm{rot}\,\dot{\bar E}_m = \nabla\times\dot{\bar E}_m = \begin{vmatrix} \bar i_x & \bar i_y & \bar i_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \dot E_m e^{-\dot\gamma z} & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\bar i_y\left(-\frac{\partial \dot E_m e^{-\dot\gamma z}}{\partial z}\right) =$$

$$= -\dot\gamma\dot E_m e^{-\dot\gamma z}\,\bar i_y \;; \qquad \dot\gamma^2 = -\omega^2\dot\varepsilon_a\mu_a, \quad \dot\gamma = -j\omega\sqrt{\dot\varepsilon_a\mu_a} \quad (14)$$

$$\dot H_m = -\frac{j\dot\gamma}{\omega\mu_a}\dot E_m e^{-\dot\gamma z}\,\bar i_y = \dot H_m e^{-\dot\gamma z}\,\bar i_y,$$ где

$$\dot{H}_m = \frac{\dot{E}_m}{\dot{Z}_c} \quad (15) \qquad \dot{Z}_c \triangleq \frac{\dot{E}_m}{\dot{H}_m} \quad (16)$$ – волновое сопротивление среды

$$\dot{Z}_c = \sqrt{\frac{\mu_a}{\dot{\varepsilon}_a}}$$

В среде затухание, где проводимость $\neq 0$, волнов. сопротивл. явл. комплексной величиной.

(15) и (16) позволяет упростить решающую задачу, т.к. из (16) => волновое сопротивл. среды зависит только от электродинам. св-в. среды (ε_a и μ_a), т.е. для заданной среды эта вел-на м.б. заранее вычисленна, поэтому, как следует из (15) не нужно решать задачу заново, надо лишь воспользоваться ф-лой (15).

Доказали, что $\dot{\bar{H}}_m = \dot{H}_m e^{-\gamma z} \bar{i}_y$ (17)

из (17) => $\dot{\bar{H}}_m(z,t) \parallel \bar{i}_y$, т.е. в-р магнитного поля лежит в пл-ти YoZ, т.е. магн. волна явл. тоже линейно поляризованной.

$\dot{\bar{H}}_m(z,t) \perp \bar{i}_z$, из (8) и (17) => $\bar{E}(z,t) \perp \bar{H}(z,t)$,

т.к. $\bar{E}(z,t) \cdot \bar{H}(z,t) = A_m (\overbrace{i_x \cdot i_y}^{0}) = 0$

Рассмотрим поведение вектора Пойнтинга

Комплексный вектор Пойнтинга (в след. семинарах):

$$\dot{\bar{\Pi}} \triangleq \frac{1}{2} \dot{\bar{E}}_m \times \bar{H}_m^* \quad (18)$$

$$\dot{\bar{\Pi}} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} i_x & i_y & i_z \\ \dot{E}_m e^{-\gamma z} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\dot{E}_m^*}{\dot{Z}_c^*} e^{\gamma z} & 0 \end{vmatrix} = \bar{i}_z \frac{|\dot{E}_m|^2}{2 \dot{Z}_c^*} \quad (19)$$

из (19) => $\dot{\bar{\Pi}} \parallel \bar{i}_z$. Ниже будет показано, что веществ. часть комплекс. в-ра пойнтинга представл. собой среднюю мощность на периоде высокой частоты $T = 2\pi/\omega$

$$\bar{\Pi}_{ср} = Re\{\dot{\bar{\Pi}}\} = \frac{|\dot{E}_m|^2}{2 Re \dot{Z}_c^*} \vec{i}_z \quad (20)$$

(20) => $\bar{\Pi}_{ср} \parallel i_z$ <=> в случае плоской электромагн. волны в-р пойнтинга направлен в направлении распространения волны.

Это не явл. очевидным фактом и требует доказательства.

Рассмотрим частный случай:
Э/М. поле в свободном пространстве

$\sigma = 0$; $\varepsilon_a = \varepsilon_0$, $\mu_a = \mu_0$ - э/м поле в свободн. пр-ве.

в этом случае

$\dot{\varepsilon}_a = \varepsilon_0$, (21) $Z_c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi$ {377 Ом} (для атмосферы)

т.е. в своб. пр-в. Z_c - веществ. параметр.

из (8) и (15) => магн. и электр. поле наход. в фазе

а из (20) => $\bar{\Pi}_{cp} = \frac{|\dot{E}_m|^2}{2 Z_0} \bar{i}_z = \frac{|\dot{E}_m|^2}{240\pi} \bar{i}_z$

$$\boxed{|\bar{\Pi}_{cp}| = \frac{|\dot{E}_m|^2}{240\pi} \quad (22)}$$ - плотность потока мощности

Найдем фазовую скорость Э./М. ~~волны~~ поля.

$v_\varphi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = c$; $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8$ м/с - фазов. скорость.
(по данным семинара № 4)

02.11.
Семинар № 5 $\mu_a = \mu_0$
$\varepsilon_a = \varepsilon_0$
$\sigma = 0$

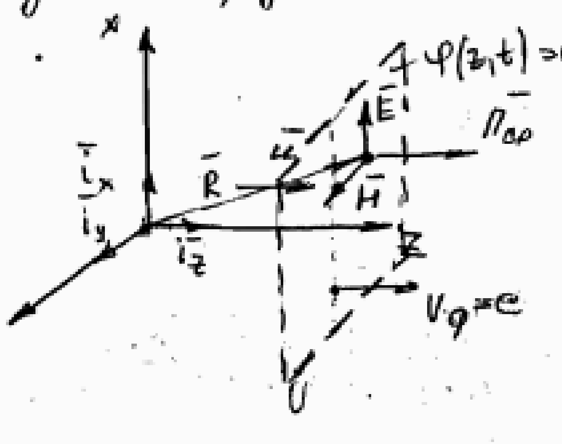
$\dot{\gamma} = j\omega\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}$ $\quad \dot{\gamma} = j\omega\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ $\quad \dot{\gamma} = \alpha + j\beta$.

Из (1) видно, что в своб. пр-ве коэф. распространения - мнимая вел-на. Из (2) следует:

1. $\beta = \omega\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ $\quad$ 2. $\alpha = 0$, т.к. резистивные потери отсутствуют

$V_\varphi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8$ м/с $= c$ - скор. фазовая, скорость распростран. э/м. волны

Полученные рез-ты на лекции представим в граф. виде:



$\bar{E}(z,t) = E_{mx} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \varphi_{0E}) \bar{i}_x$

$\bar{H}(z,t) = \frac{E_{mx}}{Re\,\dot{Z}_c} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \varphi_{0H}) \bar{i}_y$

$\varphi_{0E} = \varphi_{0H}$, $\bar{\Pi}_{cp} = \frac{E_{mx}^2}{2\,Re\,\dot{Z}_c} \bar{i}_z$

$\varphi(z,t) = C_\varphi$ - эквифазная поверхность.

Выводы: 1. Плоский хар-р волны
2. В произв. (·) волн. фронта показано расположение $\bar{E}, \bar{H}, \bar{\Pi}_{cp}$

3. В любой (·), принадл. волн. фронту, значения $\bar{E}, \bar{H}$ и $\bar{\Pi}_{cp}$ одинаковы.

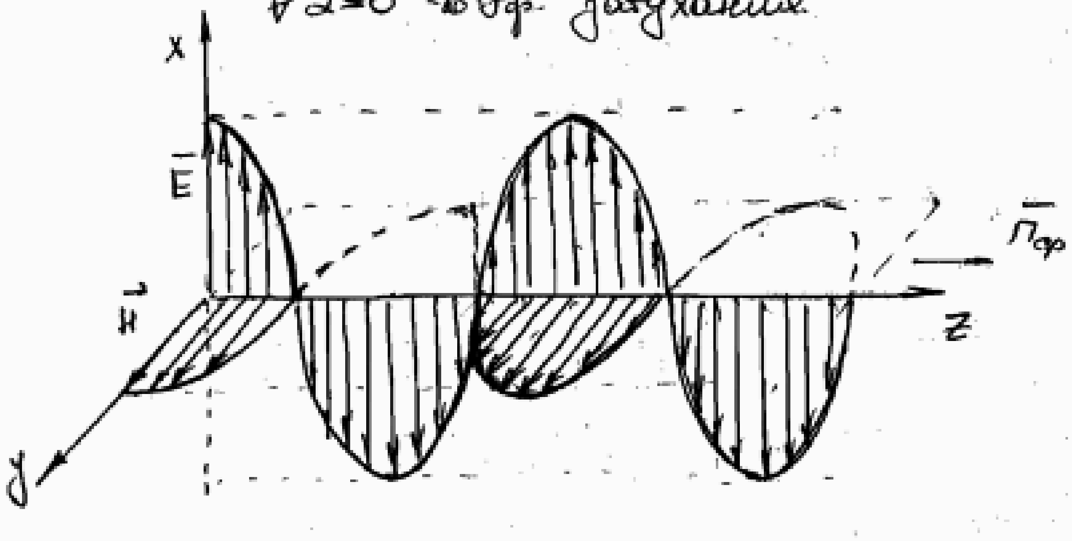
4. Волновой фронт перем. с фазов. скор-тью $V_\varphi = c$

5. $\frac{\partial E}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial E}{\partial y} = 0$; $\frac{\partial H}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial H}{\partial y} = 0$; - частные произв. по поперечным координатам нулевые

6. $\bar{E} \parallel \bar{i}_x$; $\bar{H} \parallel \bar{i}_y \Rightarrow$ э/м. волна линейно поляризованна

7. $\bar{\Pi}_{cp} \parallel \bar{U}$.

$\alpha = 0$ - коэф. затухания



Здесь отчетливо виден переменный хар-р поля

Дифференциальные операторы второго порядка

$\varphi = \varphi(\bar{R})$ - скалярное поле

$\bar{a} = \bar{a}(\bar{R})$ - векторное поле

$\bar{R} = (x, y, z)$

$\text{grad}\,\varphi$ = вектор = $\nabla \varphi$

$\text{div}\,\bar{a}$ = скаляр = $\nabla \cdot \bar{a}$

$\text{rot}\,\bar{a}$ = вектор = $\nabla \times \bar{a}$

	$grad\varphi$	$div\bar{a}$	$rot\bar{a}$
grad	−	+	−
div	+	−	+
rot	+	−	+

"−" - операция не имеет ~~смы~~ смысла
"+" - операция ∃

1. $grad(div\bar{a}) = \nabla(\nabla\cdot\bar{a})$ (6) Более ниче сказать не можем: операция существует

2. $div(grad\varphi) = \nabla\cdot(\nabla\varphi) = (\nabla\cdot\nabla)\varphi = \nabla^2\varphi$

Доказать в ~~в~~ координатной форме

3. $div(rot\bar{a}) = \nabla\cdot(\nabla\times\bar{a}) = 0$ (7) (как смеш. пр-е, ~~содерж.~~ ~~с~~ одного в-ра)

$$\nabla\times\bar{a} = \begin{vmatrix} i_x & i_y & i_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \bar{i}_x\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) - \bar{i}_y\left(\frac{\partial a_z}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial z}\right) + \bar{i}_z\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)$$

$$\nabla\cdot(\nabla\times\bar{a}) = \frac{\partial a_z}{\partial x\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial x\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x\partial y} + \frac{\partial a_x}{\partial y\partial z} + \frac{\partial a_y}{\partial x\partial z} - \frac{\partial a_x}{\partial y\partial z} = 0$$

Это выполняется, если каждая из коорд. дважды диффер. и непрерывна

4. $rot(grad\varphi) = \nabla\times(\nabla\varphi) = (\nabla\times\nabla)\varphi = 0$

т.к. $\bar{a}\times\bar{a} = |a|^2\sin 0^\circ = 0$.
на летучке доказать в коорд. форме.

5. $rot(rot\bar{a}) = \nabla\times(\nabla\times\bar{a})$, ранее показано.

в летучке в коорд. форме не выводить!

Понятие потенциального векторного поля. Понятие потенциала

Пусть дано вект. поле $\bar{a} = \bar{a}(\bar{R})$, в нек. пр-ве Ω, $\bar{R} \in \Omega$.

Поле называется потенциальным, если $\operatorname{rot} \bar{a} = \bar{O}$, $\bar{O}$ -нулевой вектор.

В этом случае $\bar{a} = \operatorname{grad} \varphi$ ($\bar{a}$ м.б. представлено.)

$\varphi = \varphi(\bar{R}) = \varphi(x, y, z)$ - скалярный потенциал.

Св-ва $\varphi(\bar{R})$:

1. $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} \varphi) = \vec{O}$

$$\nabla \times (\nabla \varphi) = (\nabla \times \nabla)\varphi = \vec{O}$$

2. неопределенность скалярного потенциала:

if $\bar{a} = \operatorname{grad} \varphi$, тогда любой (10) $\tilde{\varphi} = \varphi + C$ - скалярн. потенциал. ($C = \text{const}$ по x, y, z.)

т.е. скалярный потенциал определен с точностью до константы

Сам потенциал не имеет физ. смысла, зато разность потенциалов ~~...~~ хар-ется работой на перемещение един. точечного заряда из одной точки пр-ва в другую.

~~(10) необх. условие~~. (10) -необх. и дост. услов.

Достаточность: $\bar{a} = \operatorname{grad} \varphi$, $\tilde{\varphi} = \varphi + c$

Док-ть: $\operatorname{grad} \tilde{\varphi} = \bar{a}$

Док-во

$$\operatorname{grad} \tilde{\varphi} = \operatorname{grad}(\varphi + c.) = \operatorname{grad} \varphi + \underbrace{\operatorname{grad} c}_{=0} = \operatorname{grad} \varphi = \bar{a}$$

Необходимость: $\bar{a} = \operatorname{grad} \varphi$, $\bar{a} = \operatorname{grad} \tilde{\varphi}$

Доказать: $\tilde{\varphi} = \varphi + C$

Док-во:

$$\operatorname{grad} \tilde{\varphi} - \operatorname{grad} \varphi = \operatorname{grad}(\tilde{\varphi} - \varphi) = \bar{O}$$

т.е. $\frac{\partial}{\partial x}(\tilde{\varphi} - \varphi)\bar{i}_x + \frac{\partial}{\partial y}(\tilde{\varphi} - \varphi)\bar{i}_y + \frac{\partial}{\partial z}(\tilde{\varphi} - \varphi) = 0\bar{i}_x + 0\bar{i}_y + 0\bar{i}_z$

Сравнивая одноимен. коорд, получаем:

$$\frac{\partial(\tilde{\varphi} - \varphi)}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial(\tilde{\varphi} - \varphi)}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial(\tilde{\varphi} - \varphi)}{\partial y} = 0$$

т.о. $\begin{cases} \tilde{\varphi}-\varphi = const_x \\ \tilde{\varphi}-\varphi = const_y \\ \tilde{\varphi}-\varphi = const_z \end{cases} \Rightarrow \tilde{\varphi}-\varphi = const_{x,y,z} = C.$

$\tilde{\varphi} = \varphi + C.$

Эквивалентным условию $rot\,\bar{a} = 0$, явл. условие:

$\oint\limits_L \bar{a}\,d\bar{l} = 0$ – циркуляция по замкнутому контуру, работа по замкнутому контуру.

$$\int\limits_{S_K} rot\,\bar{a}\cdot d\bar{S} = \oint\limits_L \bar{a}\cdot d\bar{l} = 0.$$

Т.к. $rot\,\bar{a} = 0$, то поле наз. безвихревым.

Понятие соленоидального поля.
Понятие векторного потенциала.

$\bar{a} = \bar{a}(\bar{R}) \quad \bar{R} \in \Omega.$

Вект. поле $\bar{a}$ наз. соленоидальным, если $div\,\bar{a} = 0 \quad \forall \bar{R} \in \Omega$.
Соленоидальное поле – поле без ~~ис~~ источников внутри Ω электр. заряда и вертуального магнитного поля.

В ~~это~~ этом случае можно $\bar{a} = rot\,\bar{b}$, $\bar{b}$ – векторный потенциал.

Введение потенциалов рассматриваем как инструментальное средство для упрощения решения задач.

Векторный потенциал облад. св-вом неоднозначности, т.е. ! $\bar{a} = rot\,\bar{b}$, $\Rightarrow$ $\bar{b}^* = \bar{b} + grad\varphi$ (13),
φ-произвольное скалярное поле.

(13) явл. необх. и достаточн. услов. соленоид. поля.

Достаточность. $\bar{a} = rot\bar{b}$, $\bar{b}^* = \bar{b} + grad\varphi$.
Док-ть $\bar{a} = rot\,\bar{b}^*$

Док-во ~~Ка~~ $rot\,\bar{b}^* = rot(\bar{b} + grad\varphi) = rot\,\bar{b} + \overset{0}{rot(grad\varphi)} =$
$= rot\,\bar{b} = \bar{a}$

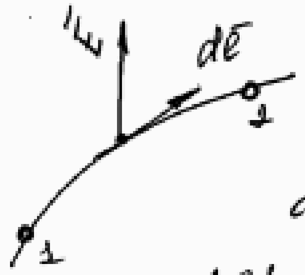
Необходимость: $\bar a = \mathrm{rot}\,\bar b$, $a = \mathrm{rot}\,\bar b^*$
Док-ть : $\bar b^* = \bar b^* + \mathrm{grad}\,\varphi$.

Док-во: $\bar a - \bar a = \mathrm{rot}\,\bar b - \mathrm{rot}\,\bar b^* = \mathrm{rot}(\bar b^* - \bar b) = 0.$

$\bar b^* - \bar b$ – потенциальное поле => $\bar b^* - \bar b = \mathrm{grad}\,\varphi$ =>
=> $\bar b^* = \bar b + \mathrm{grad}\,\varphi$.

Докажем, что если $\bar E$ – статическое поле, то (14) $\bar E = -\mathrm{grad}\,\varphi$

Если статическое, то $\mathrm{rot}\,\bar E = 0$ (15)



интересует работа на перемещение заряда q из (•) 1 в (•) 2.

=> A' – работа по перемещению заряда

$dA' = \bar E \cdot d\bar l$ => на вел-ну раб. работы влияет только касат. составляющая.

$A' = \int_1^2 dA' = \int_1^2 \bar E\, d\bar l =$; будем считать, что $\vec E = -\mathrm{grad}\,\varphi$

$= \int_1^2 -\mathrm{grad}\,\varphi \cdot d\bar r =$; $d\bar r = d\bar l = (dx, dy, dz)$

$d\varphi(x,y,z) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz = \mathrm{grad}\,\varphi \cdot d\bar r$ – полный дифференциал ф-ции 3-х переменных.

$= -\int_1^2 d\varphi = -\varphi\Big|_1^2 = \varphi(1) - \varphi(2) > 0$, т.к. $A' > 0$ =>

=> $\varphi(1) > \varphi(2)$

$A' = \varphi(1) - \varphi(2)$ – физический смысл разности потенциалов. $\bar E$ направл. в сторону убывания потенциала, чтобы работа была положительна

Это так называемое однородное поле.

Поле излучения (Вынужденное поле).

(I) $rot\,\dot{\vec{H}}_m = j\omega\varepsilon_a\dot{\vec{E}}_m + \dot{\vec{j}}_{m,ст}$

(II) $rot\,\dot{\vec{E}}_m = -j\omega\mu_a\dot{\vec{H}}_m$

(IV) $div\,\dot{\vec{B}}_m = 0$

Сторонние токи в теории антенн называются токами возбуждения. Именно они являются источниками поля, возбуждаемого антенной передатчика.

т.к. $\dot{\vec{B}}_m = \mu_a\dot{\vec{H}}_m$, то возможно переписать IV):

$div\,\dot{\vec{H}}_m = 0$ - т.е. поле $\dot{H}_m$ является соленоидальным.

Тогда: $\dot{\vec{H}}_m = rot\,\dot{\vec{A}}_m$ (1)

где $\dot{A}_m$ - векторный потенциал эл-мого ~~магнитного~~ поля.

$\dot{\vec{H}}_m = \dot{\vec{H}}_m(\vec{R})$, $\vec{R} = (x, y, z)$

$\dot{\vec{E}}_m = \dot{\vec{E}}_m(\vec{R})$, $\dot{\vec{j}}_{m,ст} = \dot{\vec{j}}_{m,ст}(\vec{R})$

(1) → (II):

$rot\,\dot{\vec{E}}_m = -j\omega\mu_a \cdot rot\,\dot{\vec{A}}_m$

$rot(\dot{\vec{E}}_m + j\omega\mu_a\dot{\vec{A}}_m) = 0$ (2)

т.е. поле $(\dot{\vec{E}}_m + j\omega\mu_a\dot{\vec{A}}_m)$ является потенциальным полем.

Следно:

$(\dot{\vec{E}}_m + j\omega\mu_a\dot{\vec{A}}_m) = -grad\,\dot{\varphi}_m$ (3); $\dot{\varphi}_m = \dot{\varphi}_m(\vec{R})$

Знак „-", поставлен для того, чтобы это ур-е имело универсальный х-р.

Из ф-лы (3):

$\dot{\vec{E}}_m = -j\omega\mu_a\dot{\vec{A}}_m - grad\,\dot{\varphi}_m$ (4) - т.е. удалось понизить размерность решаемой задачи на 2 единицы, т.к.:

$$\dot{\vec{E}}_m = \dot{E}_{mx}\vec{i}_x + \dot{E}_{my}\vec{i}_y + \dot{E}_{mz}\vec{i}_z$$
$$\dot{\vec{H}}_m = \dot{E}_{mx}\vec{i}_x + \dot{E}_{my}\vec{i}_y + \dot{E}_{mz}\vec{i}_z$$
– 6 компл. амплитуд;

$$\dot{\vec{A}}_m = \dot{A}_{mx}\vec{i}_x + \dot{A}_{my}\vec{i}_y + \dot{A}_{mz}\vec{i}_z$$
$$\dot{\varphi}_m$$
– 4 компл. амплитуды.

Подставим (1), (4) в (3) и (2):

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\dot{\vec{A}}_m - j\omega\dot{\varepsilon}_a(-j\omega\mu_a\dot{\vec{A}}_m - \operatorname{grad}\dot{\varphi}_m) = \dot{\vec{J}}_{m,\text{ст}}$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\dot{\vec{A}}_m = \nabla\times(\nabla\times\dot{\vec{A}}_m) = \begin{vmatrix} \nabla & \dot{\vec{A}}_m \\ \nabla\cdot\nabla & \nabla\cdot\dot{\vec{A}}_m \end{vmatrix} = \nabla(\nabla\dot{\vec{A}}_m) - \nabla^2\dot{\vec{A}}_m =$$

$$= \operatorname{grad}\operatorname{div}\dot{\vec{A}}_m - \nabla^2\dot{\vec{A}}_m$$

Тогда: $\operatorname{grad}\operatorname{div}\dot{\vec{A}}_m - \nabla^2\dot{\vec{A}}_m - j\omega^2\dot{\varepsilon}_a\mu_a\dot{\vec{A}}_m + j\omega\dot{\varepsilon}_a\operatorname{grad}\dot{\varphi}_m = \dot{\vec{J}}_{m,\text{ст}}$ (5)

Векторный и скалярный потенциалы обладают св-вом неоднозначности. До сих пор на них ограничения не накладывались.
Теперь потребуем, чтобы:

$\operatorname{grad}\operatorname{div}\dot{\vec{A}}_m + j\omega\dot{\varepsilon}_a\operatorname{grad}\dot{\varphi}_m = 0$ (6) – следствие из ур-ия (6)
Тогда ур-е (5) примет вид:

$$-\nabla^2\dot{\vec{A}}_m + \dot{\gamma}^2\dot{\vec{A}}_m = \dot{\vec{J}}_{m,\text{ст}}$$

$\nabla^2\dot{\vec{A}}_m - \dot{\gamma}^2\dot{\vec{A}}_m = -\dot{\vec{J}}_{m,\text{ст}}$ (7) – волновое ур-е Даламбера (Неоднородное ур-е Гельмгольца).
Здесь ур-е Гельмгольца относит-но векторного потенциала $\dot{\vec{A}}_m$.
Если удастся решить ур-е (7), то возможно найти через ур-я (1), (4) вектора $\dot{\vec{E}}_m$ и $\dot{\vec{H}}_m$.

Соотношение (6) называется условием Лоренца (калибровочное соотношение).

$$\operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\vec{A}_m + j\omega\varepsilon_a \varphi_m\right) = 0, \text{ т.е.}$$

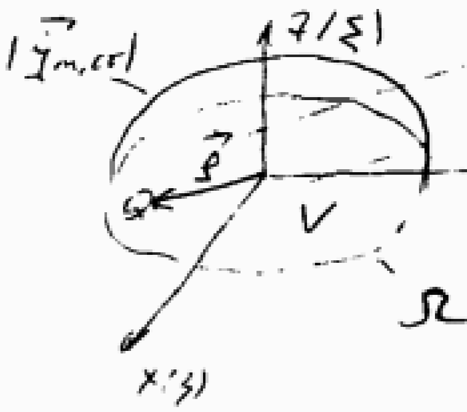
$$\operatorname{div}\vec{A}_m + j\omega\varepsilon_a \varphi_m = 0 \quad (6) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \varphi_m = -\frac{1}{j\omega\varepsilon_a}\operatorname{div}\vec{A}_m \quad (8)$$

Т.е. исходную 6-мерную задачу свели к 3-х мерной задаче отыскания вектора $\vec{A}_m$.

$$\vec{E}_m = -j\omega\mu_a\vec{A}_m - \frac{j}{\omega\varepsilon_a}\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A}_m \quad (9)$$

Из ур-ия (7) видно, что $\vec{A}_m$ значительно зависит от распр-я токов возбуждения $\vec{J}_{m,ст}$.



Апертура антенной системы:

$$\Omega = \{\vec{\rho} : \vec{J}_{m,ст}(\vec{\rho}) \neq 0\}$$

$\vec{R} = (x, y, z)$ - т-ка свободного пр-ва, $\vec{\rho} = (\xi, \eta, \zeta)$ - точка апертуры.

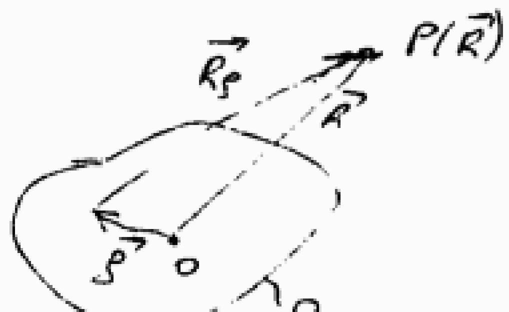
Апертура - область возбуждения (область сгустков сторонних токов).

Можно показать, что:

$$\vec{A}_m(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi}\int_V \vec{J}_{m,ст}(\rho)\,\frac{e^{-jk|\vec{R}-\vec{\rho}|}}{|\vec{R}-\vec{\rho}|}\,dV \quad (10)$$

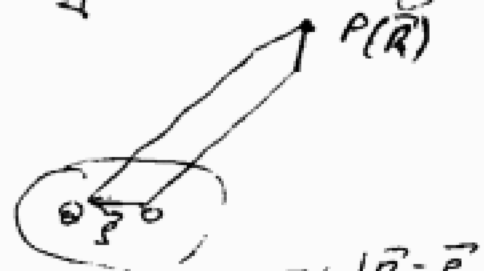
- решение ур-я Даламбера (7).

Здесь предполагают, что апертура не плоская, а может быть объемная.



$$\vec{R}_\rho = \vec{R} - \vec{\rho}.$$

В дальней зоне: $\vec{R_\xi} \parallel \vec{R}$



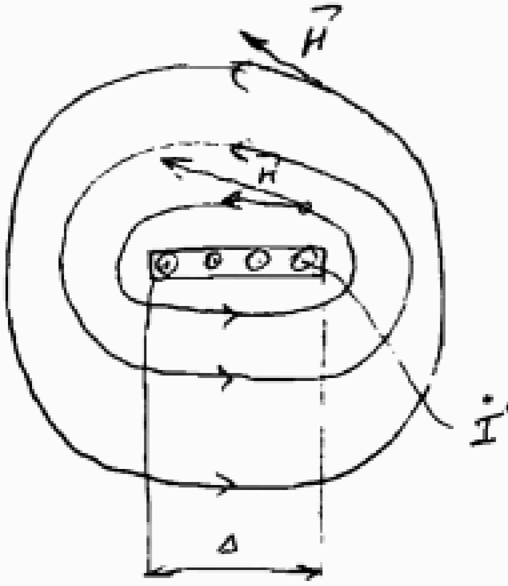
Тогда: $$\frac{e^{-j|\vec R - \vec\xi|}}{|\vec R - \vec \xi|} = \frac{e^{-j\vec{R_p}}}{\vec{R_p}} \quad (11)$$

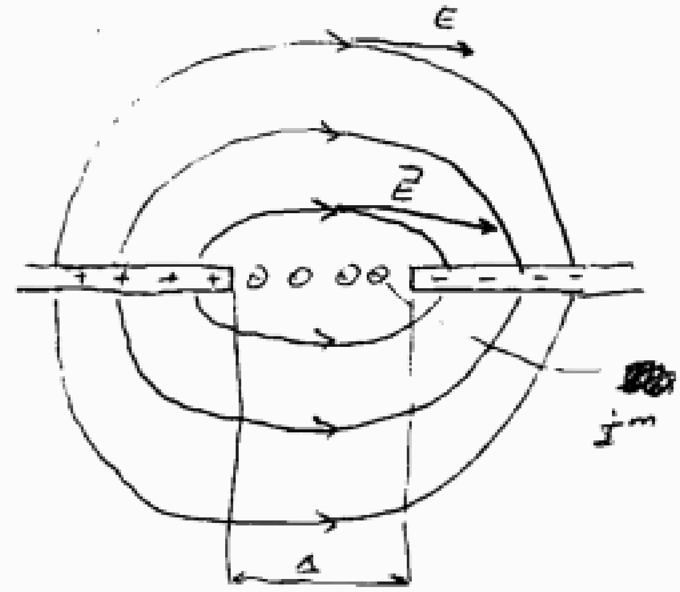
Сферическая волна, с центром в т-ке Q, а расстояние равно $\vec{R_\xi}$.

Тогда подинтегр. ф-ция в (10) представл. собой сферич. волну с амплитудой $\vec{J}_{m,a}(\xi)$.

След-но, векторный потенциал $\vec{A}_m(R)$ в т-ке $\vec R$ представляет собой суперпозицию сферич. волн, с центром в т-ке $\vec\xi$, а в кач-ве амплитуды выступает распр-е токов возбуждения $\vec{J}_{m,ст}(\vec\xi)$.

Понятие виртуального магнитного тока





Показана бесконечная проводящая полоса шириной Δ, по которой протекает эл-кий ток $\dot I^e$. Силовые линии направлены по правилу буравчика. На удалении от полосы силовые линии приближаются к окружности.

Показаны две проводящ. полуп-ти с расстоянием между ними Δ. Силовые линии поля $\vec E$ по конфигурации аналогичны линиям вектора $\vec H$.

Такая аналогия позволяет ввести понятие виртуального магнитного тока.
Т.е. поле $\vec{E}$ создаётся магнитным током, также как поле $\vec{H}$ создаётся током I^e.

Рассм. I и II ур-я Максвелла:

Предположим, что $\vec{J}_{m,ст} = 0$, тогда:

(I) $rot \vec{H}_m - j\omega\varepsilon_a \vec{E}_m = \vec{0}$

(II) $rot \vec{E}_m + j\omega\mu_a \vec{H}_m = \vec{0}$

(I) и (II) ур-я являются симметричными, т.е. одно получается из другого подстановками: $\vec{H}_m \rightleftarrows \vec{E}_m$ (1)
$\varepsilon_a \rightleftarrows -\mu_a$

В общем случае $\vec{J}_{m,ст} \neq 0$, тогда:

(I) $rot \vec{H}_m - j\omega\varepsilon_a \vec{E}_m = \vec{J}^e_{m,ст}$

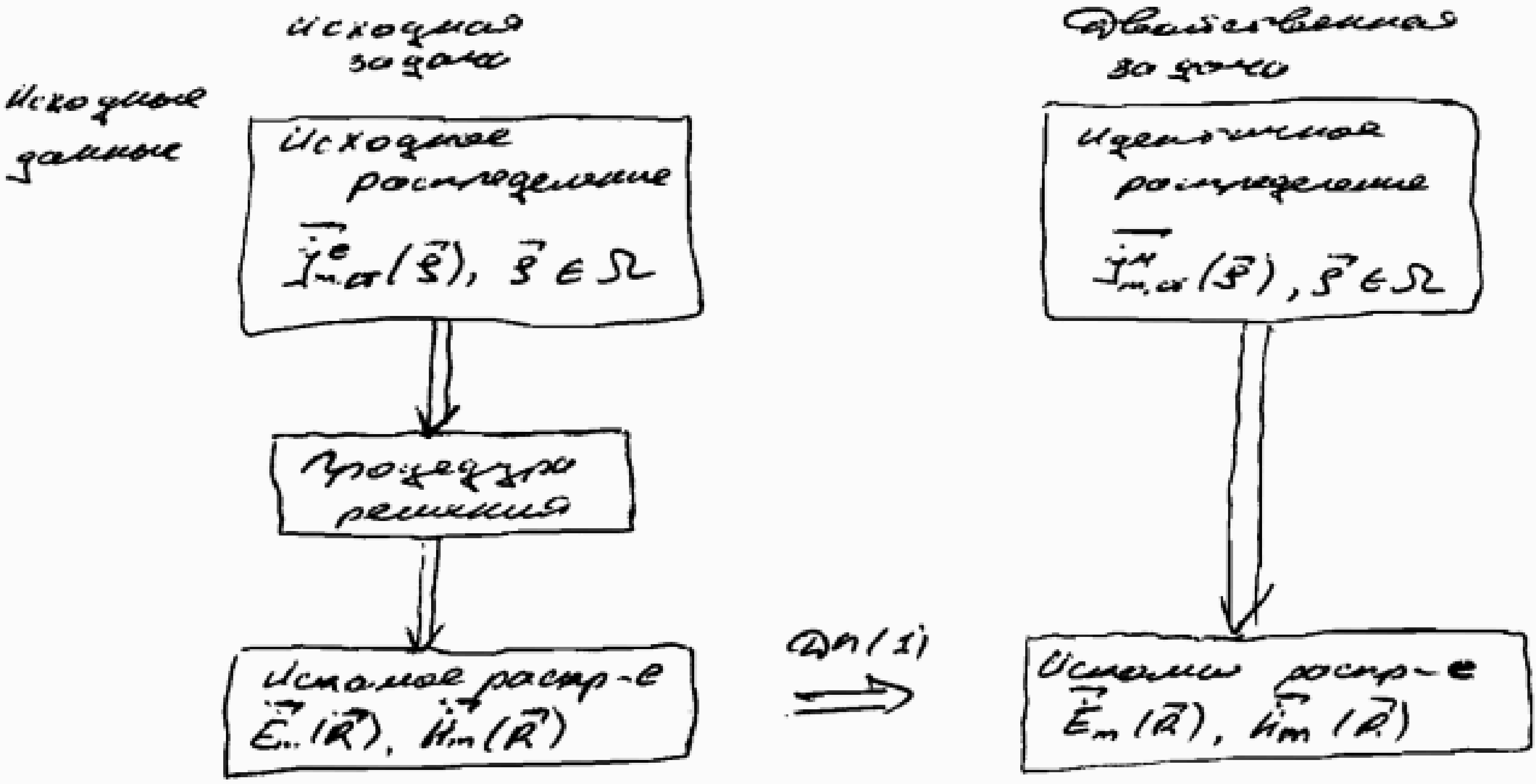
(II) $rot \vec{E}_m + j\omega\mu_a \vec{H}_m = -\vec{J}^м_{m,ст}$

Физически $\vec{J}^м_{m,ст}$ не существует (из (IV): $div \vec{B}_m = 0$).

Тогда эти ур-я также симметричны с добавлением подстановки $\vec{J}^e_{m,ст} \rightleftarrows -\vec{J}^м_{m,ст}$. (2)

Ввод данного тока позволяет получать вычислительные выгоды при расчете некоторых видов антенн (щелевые, волноводно-щелевые).
Также справедлива подстановка: $\vec{A}^e_m \rightleftarrows \vec{A}^м_m$ (4)

Принцип перестановочной двойственности.



ДП – двойственные подстановки.

В общем случае: $\vec{E}_m(\vec{R}) = \mathcal{E}\{\vec{J}^{e}_{m,ст}(\vec{\xi})\}$

$$\vec{H}_m(\vec{R}) = \mathcal{H}\{\vec{J}^{e}_{m,ст}(\vec{\xi})\}$$

$\mathcal{E}, \mathcal{H}$ – интегро-диф-ные операторы.

При решении двойственной задачи опускается процедура решения, а для получения решения подставляются ДП в заранее подготовленное решение:

$$\vec{H}_m(\vec{R}) = \mathcal{E}\{-\vec{J}^{м}_{m,ст}(\vec{\xi})\}$$

$$\vec{E}_m(\vec{R}) = \mathcal{H}\{-\vec{J}^{м}_{m,ст}(\vec{\xi})\}.$$

Методика вычисления полей излучения в случае электрических и магнитных токов.

(I) $\operatorname{rot}\vec{H}_m - j\omega\varepsilon_a\vec{E}_m = \vec{J}^{e}_{m,ст}$

(II) $\operatorname{rot}\vec{E}_m + j\omega\mu_a\vec{H}_m = -\vec{J}^{м}_{m,ст}$

Известны формулы:

$$\left.\begin{aligned} \vec{\dot E}_m &= -j\omega\mu_a \vec{\dot A}^e_m + \frac{1}{j\omega\varepsilon_a}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{\dot A}^e_m - \mathrm{rot}\,\vec{\dot A}^m_m \\ \vec{\dot H}_m &= -j\omega\varepsilon_a \vec{\dot A}^m_m + \frac{1}{j\omega\mu_a}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{\dot A}^m_m + \mathrm{rot}\,\vec{\dot A}^e_m \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Данные ур-я подставляются в неоднородные ур-я Гельмгольца (5, 8) и производят преобразования, подобные при наличии одного векторного потенциала. В результате получим:

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2 \vec{\dot A}^e_m - \dot\gamma^2 \vec{\dot A}^e_m &= -\vec{\dot J}^e_{m,\,ст} \\ \nabla^2 \vec{\dot A}^m_m - \dot\gamma^2 \vec{\dot A}^m_m &= -\vec{\dot J}^m_{m,\,ст} \end{aligned}\right\} \quad (3) \qquad , \dot\gamma^2 = \cancel{\ldots} - \omega^2\varepsilon_a\mu_a$$

Решение данных д.у. имеет вид

$$\vec{\dot A}^{e,м}_m = \frac{1}{4\pi}\int_V \vec{\dot J}^{e,м}_{m,ст}(\vec{S})\,\frac{e^{-j\beta(\vec R-\vec S)}}{(\vec R-\vec S)}\,dV \quad (4)$$

где $\beta_{ср} = \frac{\omega}{V_ф} = \frac{2\pi}{\lambda_{ср}}$ (5)

$V_ф = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a\mu_a}}$ (6), где ε_a - абсолютная диэлектрич. проницаемость.

В свободном пр-ве: $V_ф = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = c = 3\cdot10^8$ м/с.

$\vec E_m$ и $\vec H_m$ находятся подстановкой (4) в (2).
Ф-ла (2) как решение задачи (3) соотв. наиболее общему случаю, когда наряду с эл-ними токами имеются фиктивные магнитные токи.

В общем виде (4) простое решение получить сложно. Поэтому всё пр-во разбивается на 3 зоны по мере удаления от апертуры антенны (ближнюю, промежуточную, дальнюю).
Задачи решаются раздельно для каждой из зон
Дальняя - зона Фраунгофера
Промежут. - зона Френеля.

Рассмотрим дальнюю зону.

Делаются предположения:

$\vec{R}_\xi = \vec{R} - \vec{\xi}$ $\qquad \vec{R} = (R, \Theta, \varphi)$

$\Theta = \Theta(\vec{\xi})$

$\vec{\xi} = (\xi, \eta, \zeta)$

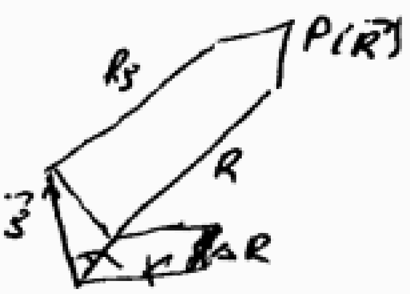
Тогда ф-ла (4) принимает вид:

$$\vec{\dot{A}}_m^{э,м}(\vec{R}) = \vec{\dot{A}}_m^{э,м}(R, \Theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi}\frac{e^{-i\beta R}}{R}\int\limits_{V(\Omega)} \vec{\dot{J}}_m^{э,м}(\vec{\xi})\, e^{-i\beta\xi\cos\gamma}\, dV \quad (9)$$

$$\vec{\dot{A}}_m^{э,м}(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega} \vec{\dot{J}}_m^{э,м}(\vec{\xi})\, \frac{e^{-i\beta R_\xi}}{R_\xi}\, dV \quad (5')$$

Заменим в (5') R_ξ в знаменателе на R (т.к. $R_\xi \cong R \gg \xi_{max}$). В числителе этого делать нельзя, т.к. он входит в состав аргумента экспоненты, который имеет период 2π.

$$R_\xi = R - (\vec{\xi}\cdot\vec{u}), \quad \vec{u} = \frac{\vec{R}}{R}$$



$\vec{\xi}\cdot\vec{u} = \xi u\cos\gamma = \xi\cos\gamma$ (12)

$\Delta R = R_\xi - R$ (13)

Вблизи $\Delta R = -\xi\cos\gamma$ (14)

Ф-ла (14) справедлива в случае, когда $\vec{R} \parallel \vec{R}_\xi$ – ~~дальняя~~ приближение Фраунгофера.

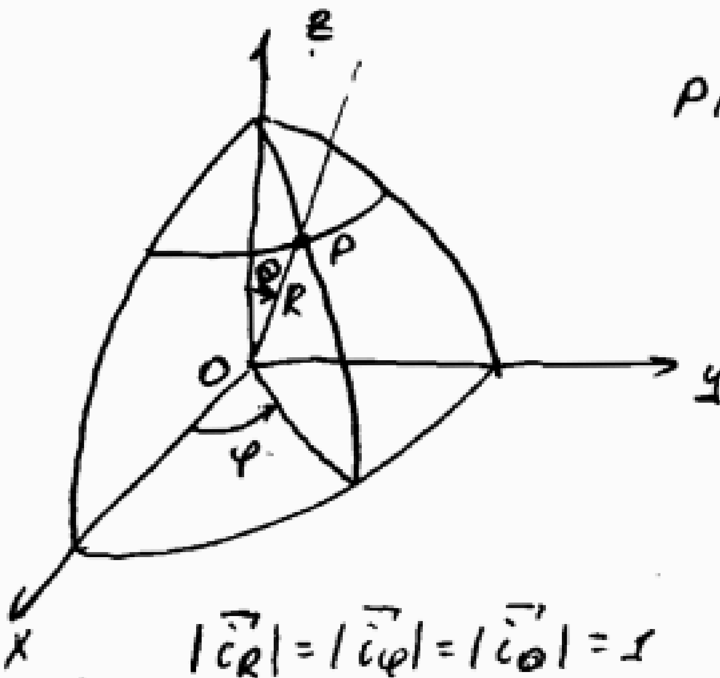
Потенциал, вычисленный по ф-ле (9) будем обозначать $\vec{\dot{A}}_{m\infty}^{э,м}(\vec{R})$, т.е. т-ка наблюдения устремлена в бесконечность относит-но апертуры.

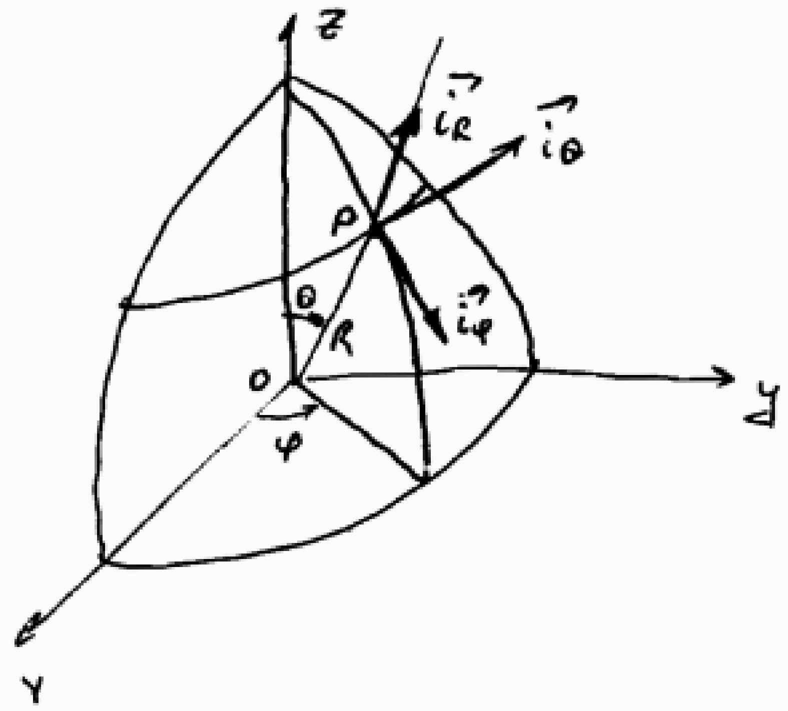
Замечание.

Любой потенциал может быть представлен в виде:

$$\vec{\dot{A}}_m = \dot{A}_{mR}\,\vec{i}_R + \dot{A}_{m\Theta}\,\vec{i}_\Theta + \dot{A}_{m\varphi}\,\vec{i}_\varphi$$

$P(R, \Theta, \varphi)$





$$|\vec{i}_R| = |\vec{i}_\varphi| = |\vec{i}_\Theta| = 1$$

$$\vec{i}_R \perp \vec{i}_\varphi ; \; \vec{i}_R \perp \vec{i}_\Theta ; \; \vec{i}_\varphi \perp \vec{i}_\Theta \quad (16)$$

$$\dot{E}_{m\Theta} = -j\beta c \left(\dot{A}^{e}_{m\Theta\infty} \dot{Z}_c - \dot{A}^{m}_{m\varphi\infty}\right)$$

$$\dot{E}_{m\varphi} = -j\beta c \left(\dot{A}^{e}_{m\varphi\infty} \dot{Z}_c - \dot{A}^{m}_{m\Theta\infty}\right)$$

$$\dot{E}_{mR} = 0$$

$$\dot{Z}_c = \sqrt{\frac{\mu_a}{\dot{\varepsilon}_a}}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{H}_{m\varphi} &= \frac{\dot{E}_{m\Theta}}{\dot{Z}_c} \\ \dot{H}_{m\Theta} &= -\frac{\dot{E}_{m\varphi}}{\dot{Z}_c} \\ \dot{H}_{mR} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Радиальная составляющая обоих векторов равна нулю.

$$\vec{\dot{E}}_m = \dot{E}_{mR}\vec{i}_R + \dot{E}_{m\Theta}\vec{i}_\Theta + \dot{E}_{m\varphi}\vec{i}_\varphi \quad (3) \; ; \; \vec{\dot{E}}_m = \vec{\dot{E}}_m(\vec{R}) ; \; \vec{R} = (R, \Theta, \varphi).$$

В дальней зоне:

$$\vec{\dot{E}}_m = \dot{E}_{m\Theta}\vec{i}_\Theta + \dot{E}_{m\varphi}\vec{i}_\varphi \quad (4)$$

$$\dot{A}^{e,м}_{m\infty}(R, \Theta, \varphi) = \dot{A}_{m\infty}(\Theta, \varphi) \cdot \frac{e^{-j\beta R}}{R}, \quad (5)$$

где $\dot{A}_{m\infty}(\Theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{V(\Omega)} \dot{J}^{e,м}_{m,ст}(\vec{\rho})\, e^{j\beta\rho\cos\gamma}\, dV \; ; \; \vec{\rho} = (\xi, \eta\, \zeta).$

Здесь в неявном виде: $\gamma = \gamma(\Theta, \varphi)$.
Это интеграл в ФЗ не зависит от R, поэтому удается разделить пространств. и угловые координаты.

т.е. из (5) векторный эл.-ний и магнитный потенциал в ДЗ имеет характер сферической волны, и каждая из их координат имеет характер сферических волн!

Функция направленности по полю.

Комплекс. векторная амплитуда эл-ного поля в ДЗ описывается ф-лой (4).

$$\vec{\dot{E}}_m(R,\theta,\varphi) = \dot{E}_{m\theta}(\theta,\varphi)\frac{e^{-i\beta R}}{R}\vec{i}_\theta + \dot{E}_{m\varphi}(\theta,\varphi)\frac{e^{-i\beta R}}{R}\vec{i}_\varphi \quad (7)$$

т.е. каждая из координат обратно-пропорц. R в первой степени.

Рассм. одну из коорд., напр. мер:

$\dot{E}_{m\theta}(\theta,\varphi)$ - она х-зует зависимость составляющей θ от направления θ,φ, т.е. она х-зует угловое расп-е комплексной амплитуды составляющей θ и φ.

В теории антенн важное значение имеет ф-ция направленности по полю:

$$\dot{F}_\theta(\theta,\varphi) = \frac{\dot{E}_{m\theta}(\theta,\varphi)}{|\dot{E}_{m\theta}(\theta_1,\varphi_1)|}, \quad (8)$$

где $(\theta_1,\varphi_1) = \arg\max\limits_{(\theta,\varphi)} |\dot{E}_{m\theta}(\theta,\varphi)|$ (9) - х-зует максимальное излучение по координате θ.

Из (8) следует, что: $0 \le |\dot{F}_\theta(\theta,\varphi)| \le 1$ - х-зует нормированное расп-е величины $\dot{E}_{m\theta}(\theta,\varphi)$.

Аналогично определяется ф-ция напр-ти по составляющей φ:

$$F_\varphi(\theta,\varphi) = \frac{\dot{E}_{m\varphi}(\theta,\varphi)}{|\dot{E}_{m\varphi}(\theta_2,\varphi_2)|} \ (12), \quad (\theta_2,\varphi_2) = \arg\max\limits_{(\theta,\varphi)} |\dot{E}_{m\varphi}(\theta,\varphi)| \ (13).$$

т. е. в дальней зоне эл-кое поле х-ся двумя комплексными ф-циями направленности: $F_\theta(\theta,\varphi)$, $F_\varphi(\theta,\varphi)$ - по составляющим θ и φ.

Введем также третью ф-цию напр-ти по полю

$$|\dot{F}(\theta,\varphi)| = F(\theta,\varphi) \stackrel{\Delta}{=} \frac{|\dot{E}_m(\theta,\varphi)|}{|\dot{E}_m(\theta_0,\varphi_0)|} \quad (14).$$

$$(\theta_0,\varphi_0) = \arg\max_{(\theta,\varphi)} |\dot{E}_m(\theta,\varphi)|$$

В общем случае напр-е (θ_0,φ_0) отличается от напр-й (θ_1,φ_1) и (θ_2,φ_2).

$$E_m(\theta,\varphi) = \sqrt{E_{m\theta}^2(\theta,\varphi) + E_{m\varphi}^2(\theta,\varphi)}.$$

Св-ва поля излучения в дальней зоне.

1. Поперечный характер поля излучения.
Радиальная составляющая поля в дальней зоне для любой излучающей системы равна нулю. Это следует из системы (17).

Докажем это другим способом:

$$(\vec{E}_m, \vec{i}_R) = (\dot{E}_{m\theta}\vec{i}_\theta + \dot{E}_{m\varphi}\vec{i}_\varphi, \vec{i}_R) = \dot{E}_{m\theta}\underbrace{(\vec{i}_\theta, \vec{i}_R)}_{=0} + \dot{E}_{m\varphi}\underbrace{(\vec{i}_\varphi, \vec{i}_R)}_{=0} = 0,$$

значит $\dot{\vec{E}}_m \perp \vec{i}_R$ $(\dot{\vec{E}}(\vec{R},t) \perp \vec{i}_R)$

- т. е. вектор $\vec{E}(\vec{R},t)$ лежит в пл-ти, перпендикулярной орту $\vec{i}_R$.

2. Эл-магн поле в дальней зоне в общем случае представляет собой эллиптически поляризованную волну.
Полное док-во будет дано в след. семестре

Из ф-лы (3) $\dot{E}_{m\theta}\vec{i}_\theta \parallel \vec{i}_\theta$ и представляет собой линейно поляризованную волну.

Аналогично $\dot{E}_{m\varphi}\vec{i}_\varphi \parallel \vec{i}_\varphi$ для любого (θ, φ) и t - линейно поляриз. волна

Т.е. в правой части (3) - суперпозиция двух линейно поляриз. волн.

Но: $\dot{E}_{m\theta} = |\dot{E}_{m\theta}| e^{-j\varphi_\theta}$

$$\dot{E}_{m\varphi} = |\dot{E}_{m\varphi}| e^{-j\varphi_\varphi}$$

В общем случае соотношение начальных фаз φ_θ, φ_φ может быть произвольным, что означает, что вектор $\vec{E}(\vec{R}, t)$ - эл-магн. поле - с течением времени будет описывать спираль на эллиптическом цилиндре.

При этом проекция этого вектора на пл-ть, перпендик. орту $\vec{i}_R$ за время $T = \frac{2\pi}{\omega}$ будет описывать один полный оборот на эллипсе.

Годографом пр. этим вектора на картинную плоскость является эллипс.

3. Эл-магнитная волна является локально плоской

Рассм. 1-2 строки системы (17)

$$\dot{H}_{m\varphi} = \frac{\dot{E}_{m\theta}}{\dot{Z}_c}$$

$$\dot{H}_{m\theta} = -\frac{\dot{E}_{m\varphi}}{\dot{Z}_c}$$

Тогда: $\dot{Z}_c = \frac{\dot{E}_{m\theta}}{\dot{H}_{m\varphi}} = -\frac{\dot{E}_{m\varphi}}{\dot{H}_{m\theta}}$ (15) - это условие свойственно плоской волне.

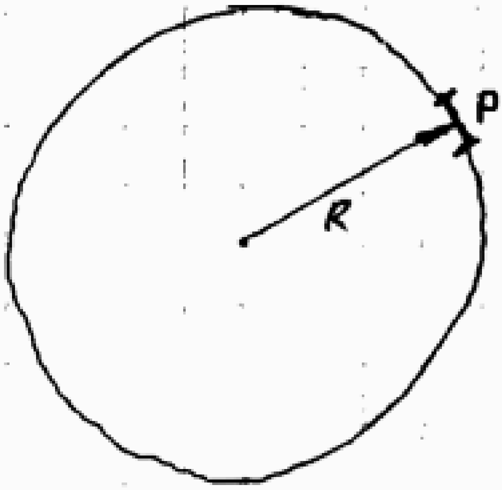
4. Эл-магнитная волна в дальней зоне в целом является сферической.

Т.к. $\dot{E}_{m\theta} \sim \dot{E}_{m\theta}(\theta, \varphi) e^{-j\beta R}/R$

$$\dot{E}_{m\varphi} \sim \dot{E}_{m\varphi}(\theta, \varphi) \frac{e^{-j\beta R}}{R}$$

То $\vec{E}_m \sim \dot{E}_m(\theta, \varphi) \frac{e^{-j\beta R}}{R}$ - признак сферической волны.

Из св-в зи 4:



$R >> \rho_{max}$

т.е. в ДЗ сферическая волна в окрестности т-ки P аппроксимируется плоской волной.

5. Ампл. Ф-ция направленности по полю (и по мощности) в дальней зоне не зависит от расстояния.

$$|\dot F_\theta| = \frac{E_{m\theta}(R,\theta,\varphi)}{E_{m\theta}(R,\theta_1,\varphi_1)} = \frac{E_{m\theta}(\theta,\varphi)\cdot\frac{1}{R}}{E_{m\theta}(\theta_1,\varphi_1)\cdot\frac{1}{R}} = \frac{E_{m\theta}(\theta,\varphi)}{E_{m\theta}(\theta_1,\varphi_1)}$$

Аналогично для $|\dot F_\varphi(\theta,\varphi)|$

$$|\dot F(\theta,\varphi)| = \frac{E_m(R,\theta,\varphi)}{E_m(R,\theta_0,\varphi_0)} = \frac{E_m(\theta,\varphi)}{E_m(\theta_0,\varphi_0)}\ ?$$

6. Комплексный вектор Пойнтинга в дальней зоне является вещественным (в свободном пр-ве).

$\vec{\dot\Pi} = \frac{1}{2}\vec{\dot E}_m \times \vec{\dot H}_m^* \ (16)$ т.к. орты ортогональны, то возможно использ. векторные.

$$\vec{\dot\Pi} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec i_R & \vec i_\theta & \vec i_\varphi \\ 0 & \dot E_{m\theta} & \dot E_{m\varphi} \\ 0 & \dot H^*_{m\theta} & \dot H^*_{m\varphi}\end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec i_R & \vec i_\theta & \vec i_\varphi \\ 0 & \dot E_{m\theta} & \dot E_{m\varphi} \\ 0 & -\frac{\dot E^*_{m\varphi}}{\dot Z_c^*} & \frac{\dot E^*_{m\theta}}{\dot Z_c^*}\end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2\dot Z_c^*}\vec i_R\left(\dot E_{m\theta}\dot E^*_{m\theta} + \dot E_{m\varphi}\dot E^*_{m\varphi}\right) = \frac{1}{2\dot Z_c^*}\vec i_R\left(E^2_{m\theta} + E^2_{m\varphi}\right) =$$

$$= \vec{\dot\Pi} = \frac{E_m^2}{2\dot Z_c^*}\ (17)$$

В общем случае он не вещественен.

$\dot{z}_{вс} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\dot{\varepsilon}_a}}$ в свобод. пр-ве: $\mu_a = \mu_0$, $\sigma = 0$, $\dot{\varepsilon}_a = \varepsilon_0$

Лекция 14.11. (далее идут лекции Чекушкиной)

Компл. вектор «П» в свободном пр-ве явл-ся чисто вещественным.

В общем случ., как следует из (17) он не явл-ся веществ., т.к. волнов. сопротив. в произв. среде явл. вещест.

$$Z_c = \sqrt{\frac{\mu_a}{\dot\varepsilon_a}}$$

в $\mu_a = \mu_0$, $\sigma = 0$, $\dot\varepsilon_a = \varepsilon_0$

14.11. 2006 (по-моему, это была лекция)

Семинар

$$\dot{\bar\Pi} = \frac{1}{2}\dot{\bar E}_m \times \dot{\bar H}_m^* = \frac{1}{2\dot Z_c^*}\left(E_{m\theta}^2 + E_{m\varphi}^2\right)\bar i_R \quad \boxed{1}$$

Компл. вектор Пойнтинга содержит 2 компл. составл.

$|\dot E_{m\theta}|$ и $|\dot E_{m\varphi}|$ $(\bar i_\theta \perp \bar i_\varphi)$

Важн. случай:

$\mu_a = \mu_0$ $\sigma = 0$ $\dot\varepsilon_a = \varepsilon_a = \varepsilon_0$

$$\dot Z_c = Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi$$

$$\bar\Pi_{ср} = Re\left\{\frac{E_{m\theta}^2 + E_{m\varphi}^2}{2Z_0}\right\}\bar i_R = \frac{E_m^2}{2Z_0}\bar i_R \quad (2)$$

$$E_m^2 = E_{m\theta}^2 + E_{m\varphi}^2$$

Вект П и Пср содержит только радиальную составл., и не содержит попереч.

В свободном пр-ве компл. вект П явл. чисто веществ. и опр-ся по ф-ле (2)

$$F_п(\theta,\varphi) \triangleq \frac{\Pi_{ср}(\theta,\varphi)}{\Pi_{ср}(\theta_0,\varphi_0)} \quad (3)$$ [illegible]

$$(\theta_0,\varphi_0) = \arg\max_{(\theta,\varphi)} \Pi_{ср}(\theta,\varphi) \quad (4)$$

Из (2) ⇒, что

$$F_п(\theta,\varphi) = \frac{E_m^2(\theta,\varphi)}{E_m^2(\theta_0,\varphi_0)} = F^2(\theta,\varphi)$$

$$F(\theta,\varphi) = \frac{E_m(\theta,\varphi)}{E_m(\theta_0,\varphi_0)}$$ (см. (ф-лу 14) из пред. лекц.)

Ф-ия направл. по мощности = квадрату ФН по полю.

ФН по мощн. также, как ФН по полю в ДЗ от дальности не завис., см. ранее.

Критерий дальней зоны

$$\bar R_{ДЗ} = \frac{2D^2}{\lambda} \;?\; (13)$$

D — наибольший размер апертуры

См. рис. из прошл. лекции:

$$R_p = \sqrt{|\bar R - \bar\rho|^2} = \sqrt{R^2 - 2(\bar\rho,\bar R) + R^2} =$$
$$= R\sqrt{1 - 2\frac{\rho\cos\gamma}{R} + \frac{\rho^2}{R^2}} \quad (6)$$

Раскладывая (6) в ряд по степеням ρ получим:

$$R_p = R - \rho\cos\gamma + \frac{1}{2}\frac{\rho^2}{R}\sin^2\gamma + \frac{1}{2}\frac{\rho^3}{R^2}\sin^2\gamma\cos\gamma$$

ДЗ: учтив только 2 первых слагаемых (7)

$$R_p = R - \rho\cos\gamma$$

При выводе критерия ДЗ ур-ие для R_p (8) будем считать приближ. знач-ем, а точным знач. будем считать

$$(R_p)_т = R - \rho\cos\gamma - \underbrace{\frac{1}{2}\frac{\rho^2}{R}\sin^2\gamma}_{(3)\ \text{бесконечно малой в ДЗ}} \quad (9), \quad \frac{\rho}{R} \ll 1$$

$$\underset{\text{приближенная фаза}}{\Psi_{пр}} = \beta (R_{\varphi})_{пр}$$

$$\underset{\text{точное}}{\Psi_{т}} = \beta (R_{\rho})_{т}$$

Погрешность, возник-ая при замене точного знач-ия приближенным:

$$\Delta\Psi = |\Psi_{пр} - \Psi_{т}| = \beta \frac{\rho^2}{2R} \sin^2\gamma.$$

Наложим ограничение на эту погр-ть:

(10) $|\Delta\Psi| < \frac{\pi}{N}$ ($N = 8$) на практике

22,5° → большое число

→ допустимая погрешн-ть

$$\Delta\Psi = \left|\beta \frac{\rho^2}{2R} \sin^2\gamma\right| \le \left|\frac{\beta\rho^2}{2R}\right| \le \Big|^{\rho < L/2}\Big| \le$$

$$\le \frac{2\pi L^2}{4 \cdot 2R\lambda} = \frac{\pi L^2}{4R}$$

с учетом (11) $\frac{\pi L^2}{\lambda 4R} \le \frac{\pi}{8} \Rightarrow$

$$\boxed{R_{ДЗ} \ge \frac{2L^2}{\lambda}} \quad (12)$$

ДЗ – те расстоян., которые расположены от апертуры на расст. $\frac{2L^2}{\lambda}$, наименьшее расстоян. ДЗ вычисл-ся по ф-ле (13) – простир-ся до бесконечн.

L/λ	10	100
$R_{ДЗ}/\lambda$	200	20000

Промежуточная зона

Н-ся также зоной Френеля – зона, расстояние которой до апертуры подчиняется условию:

$$\frac{L}{4} \cdot \frac{L}{2}\left(\frac{L}{\lambda}\right)^{1/3} \le R \le \frac{2L^2}{\lambda} \quad (14)$$

по (?), в которой удержаны 3 первых члена

$$\left\{ R_{\rho} = R - \rho\cos\gamma + \frac{1}{2}\frac{\rho^2}{R}\sin^2\gamma \quad (15) \right\}$$

Ф-лы для вектор. потенциалов электр. и магнитных полей:

$$\dot{A}_m^{e,m} = \frac{1}{4\pi}\int_{V} \bar{J}^{e,m}_{m,ст}(\bar{\rho}) \frac{e^{-j\beta R_{\rho}}}{R_{\rho}} dV \quad |R_{\rho} \to R$$

(16) $$\dot{\bar{A}}^{e,m}_{m,\varphi p} = \frac{1}{4\pi}\frac{e^{-j\beta R}}{R}\int_{V} \dot{J}^{e,m}_{m,ст}\, e^{j\left(\beta\rho\cos\gamma - \frac{1}{2}\frac{\rho^2}{R}\sin^2\gamma\right)} dV$$

$$\dot{E}_{m\theta} = -j\beta_c[\dot{z}_c \dot{A}^e_{m\theta} - \dot{A}^m_{m\varphi}]; \quad \dot{H}_{m\varphi} = \frac{\dot{E}_{m\theta}}{Z_c}$$

$$\dot{E}_{m\varphi} = -j\beta_c[\dot{z}_c \dot{A}^e_{m\varphi} + \dot{A}^m_{m\theta}]; \quad \dot{H}_{m\theta} = -\frac{\dot{E}_{m\varphi}}{Z_c}$$

$$\dot{E}_{mR} = 0; \qquad \dot{H}_{mR} = 0$$

Так же как в ДЗ последн. строка говорит о том, что радиальн. составл. "=" 0.

Св-ва поля излучения произв. излучающ. системы в промежуточн. зоне:

В целом стр-ра поля излуч в промеж. зоне имеет более сложный хар-р, однако три первых св-ва, которыми хар-ся излуч в ДЗ, при отв. на этот вопрос необх привести док-во для ДЗ. ①, ②, ③, ~~④~~;

Векторы $E_{m\theta}$ и $E_{m\varphi}$ имеют синфазн. линейную поляризацию, что нужно.

(При ответе на этот вопрос необх.

привести доказательство для ДЗ

из (16) ⇒ подынт. ф-ия зависит от R

Наряду с монотонн убыванием $\approx \frac{1}{R}$ в подынт ф-ию (16) вх $\left(\frac{1}{R}\right)$ ⇒ на монотонн зав-ть

$$\left.\begin{aligned} E_{m\theta} &\sim \frac{1}{R} \\ E_{m\varphi} &\sim \frac{1}{R} \end{aligned}\right\}$$

наклад-ся осциллирующ колебан. Обусл (16) инт, затухающие при $N \to \infty$. что подтверждает, что поле явл-ся более сложным и не явл-ся сферич ⇒ не удовл. св-ву (4).

Т.к. волна не явл сферич ⇒ ФН и по направлению будет зависеть от R.

(6): вект П. в свободн пр-ве также явл вещественным, как и в ДЗ, но не в произвольн пр-ве, он содержит только радиальн составл, а поперечн составл вектора П. $\Lambda = 0$, повторить док-во в дальней зоне для ДЗ.

Расстоян, с которых начин зона Френеля: для $\frac{L}{\lambda} = 10$

промеж зона нач-ся с 40 см.

Ближняя зона:

$$0 \le R \le \frac{L}{4} + \frac{L}{2}\left(\frac{L}{\lambda}\right)^{1/3} \qquad (17)$$

Поле имеет чрезвычайно сложн стр-ру, это поле неустановивш процессов.

Компл. вект амплит имеет все 3 составл

$$\dot{\bar{E}}_m = E_{mR}\bar{i}_R - E_{m\theta}\bar{i}_\theta - E_{m\varphi}\bar{i}_\varphi \qquad (18)$$

$\dot{E}_{mR} \ne 0$ $\qquad$ $\dot{H}_{mR} \ne 0$

радиальн составл $\ne 0$ ⇒ ни одно из перечисл св-в не выполн-ся, вектор П в БЗ не совпад с направлением распр-ия, он наряду с радиальн составл содержит и поперечн составл.

Сложн хар-р электромагн волны.

Особенности вычисления энергетических величин.

$$a(t) = A_m \cos(\omega t - \beta \cdot R + \psi_a) \qquad (1)$$

гармонич колеб $\qquad$ скалярн произв

$$b(t) = B_m \cos(\omega t - \beta \cdot R + \psi_b) \qquad (2)$$

$a(t) \cdot b(t)$?

значение этих величин важно при вычислении мощностей.

Расси аналитич сигнал:

$$\dot{a}(t) = \dot{A}_m e^{j(\omega t - \beta \cdot \bar{R})} \qquad (3) \qquad Re\{\dot{a}(t)\} = a(t) \quad ①$$

$$\dot{A}_m = A_m e^{j\psi_a} \qquad (4)$$

$$\dot{b}(t) = \dot{B}_m e^{j(\omega t - \beta \cdot R)} \qquad (5) \qquad Re\{\dot{b}(t)\} = b(t) \quad ②$$

$$\dot{B}_m = B_m e^{j\psi_b} \qquad (6)$$

$$a(t) = \frac{1}{2}\left[\dot{a}(t) + \dot{a}^*(t)\right] \qquad (7)$$

$\dot{a}^*(t)$ – компл сопряжен $\dot{a}(t)$

$$b(t) = \frac{1}{2}\left[\dot{b}(t) + \dot{b}^*(t)\right] \qquad (8)$$

$$a(t) \cdot b(t) = \frac{1}{4}\left[\dot{A}_m e^{j(\omega t - \beta \cdot \bar{R})} + \dot{A}^*_m e^{-j(\omega t - \beta \cdot \bar{R})}\right] \cdot \left[\dot{B}_m e^{j(\omega t - \beta \cdot \bar{R})} + \dot{B}^*_m e^{-j(\omega t - \beta \cdot \bar{R})}\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left\{ \left(\dot{A}_m \dot{B}_m^* + \dot{A}_m^* \dot{B}_m \right) + \left[\dot{A}_m \dot{B}_m e^{j2(\omega t - \bar\beta \cdot \bar R)} + \dot{A}_m^* \dot{B}_m^* e^{-j2(\omega t - \bar\beta \bar R)} \right] \right\} \Rightarrow$$

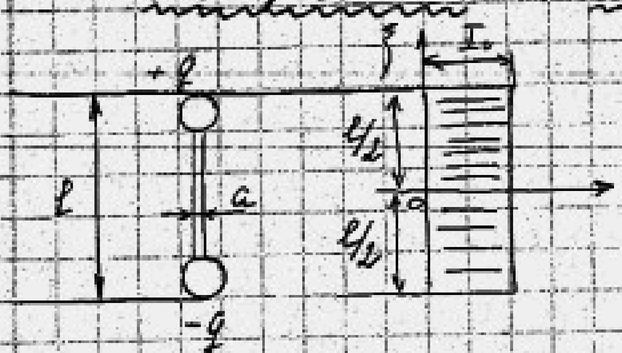
$$a(t) = \tfrac{1}{2}\operatorname{Re}\left\{ \dot a(t) \right\} \quad (9)$$

$$a(t)\cdot b(t) = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left\{ \dot A_m \dot B_m^* \right\} + \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left\{ \dot A_m \dot B_m e^{j2(\omega t - \bar\beta \bar R)} \right\} \quad (10)$$

16.11.2006

Семинар №6

Диполь Герца или элементарный электрический излучатель



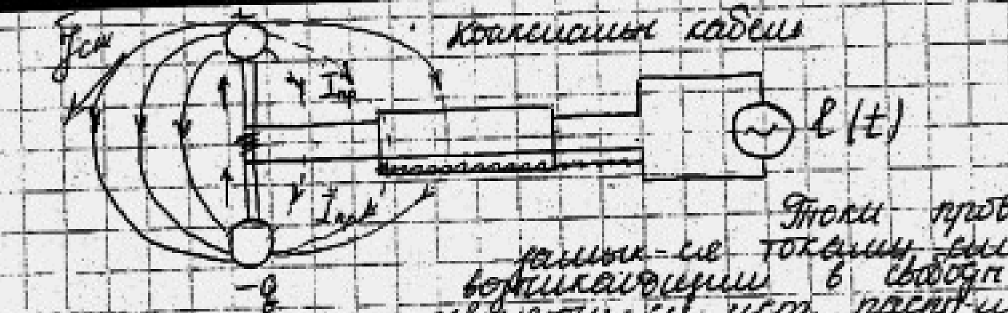
гантель с шарами на концах – элемент. электрич. излучатель; 2 шара, соединен. проводником, диаметр проводника a

$a \ll l$

$l \ll \lambda$

Если шары зарядить q и $-q$ и оставить свобод. $\Rightarrow$ эта система будет излучать колебания, при высокой проводим-ти провод. колебан. могут существовать достаточно долго.

На основе ↑ можно построить антенную систему.



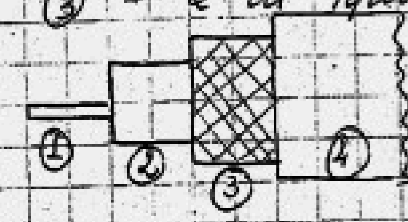
Токи проводимости замык-ся токами смещения в свобод. пр-ве и являются ист. распр-ия электром. поля

Коаксиальн. кабель представ.:

① – медный проводник (центральн.)

② – полимерная оболочка

③ – 2-ой проводник



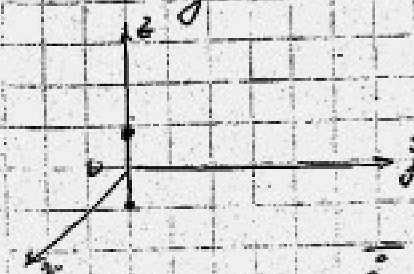
④ – наружная оболочка

Система получ-ся очень гибкой, работает на частоте до 10 ГГц

Благодаря наличию шаров на длине l ток имеет равномерное распределение по длине диполя Герца.

Именно здесь будет ф-ла в-ли член ф-ла, определяющие $\bar E_m(R)$ в Д3 (компл. вект. ампл.)

$$\bar J_{m,cm} = I_0\, \delta(x)\, \delta(y)\, \bar i_z \quad (1)$$



диполь Герца в виде отрезка располож. в начале СК и ориентиров. вдоль Oz.

Воспользуемся:

$$\dot{\bar A}_m = \frac{1}{4\pi}\int_V \bar J_m \frac{e^{-j\beta R_\rho}}{R_\rho}\, dV \quad (2)$$

$R_\rho = |\bar R - \bar\rho|$, $\quad R_\rho = R - \rho\cos\gamma$ ск. расч.

Для данного случая соз-ся свободн. незатухающие колеб.

$\omega = 2\pi f$, частота, возбуждаем генератор.

$\lambda = \frac{c}{f}$.

В ДЗ

ток электрич ⇒ вектор потенц $\bar{A}$ тоже электрическ. ⇒ не пишем индекс "с" ни у тока, ни у потенциала

$\bar{\rho} = (\xi, \eta, \zeta)$ $\bar{i}_\zeta = \bar{i}_z$;

$\underbrace{\text{Апертура}}_{\text{в данном случ.}}$ совпадает с диполем и представл. отрезок длины l

$\Omega = [-\frac{l}{2}; \frac{l}{2}]$

$R_\rho \to R$, для εкр использ (3) ⇒

$$\dot{\bar{A}}_m(R) = \frac{1}{4\pi}\left[\iiint\limits_{-\infty\,-\infty\,-l/2}^{\infty\;\;\infty\;\;l/2} I_0\,\delta(\xi)\,\delta(\eta)\right]\frac{e^{-j\beta R}}{R}\,\bar{i}_z\, e^{-j\beta\rho\cos\gamma}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta =$$

использ. фильтрующ св-во δф-ции

$$= \frac{I_0}{4\pi}\frac{e^{-j\beta R}}{R}\left[\int_{-l/2}^{l/2} e^{-j\beta|\zeta|\cos\gamma}\, d\zeta\right]\bar{i}_z \qquad (4)$$

$\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$

Оценим разность фаз между центром и концом диполя.

$$|\Delta\varphi| = |\beta\,\Delta R| \le |\beta\,\frac{l}{2}\cos\gamma| \le |\frac{2\pi}{\lambda}\frac{l}{2}| = |\frac{\pi l}{\lambda}|$$

$\Delta R = -\rho\cos\gamma$ $|\rho| = |\zeta| < \frac{l}{2}$ $(\Delta R < l/2)$

т.к. $l \ll \lambda$ $\frac{l}{\lambda} \ll 1$ ⇒

$\boxed{|\Delta\varphi| \ll 1}$ (5)

т.е. разницей фаз в эл диполе можно пренебречь, т.е. считать $|\Delta\varphi| \approx 0$

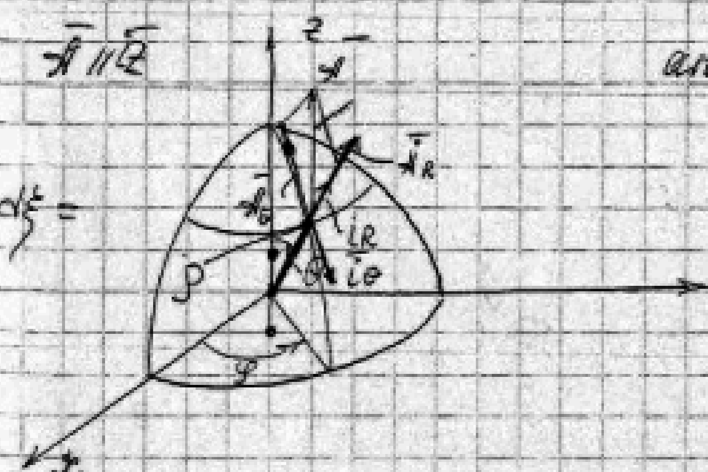
(4) преобразуем в следующий вид:

$\int_{-l/2}^{l/2} d\zeta = l$

$$\boxed{\dot{\bar{A}}_m = \frac{I_0 l}{4\pi}\frac{e^{-j\beta R}}{R}\,\bar{i}_z} \qquad (6)$$

т.к. $\int_{-l/2}^{l/2} e^{\underbrace{-j\beta|\zeta|\cos\gamma}_{\text{фаза в промежуточ точке}}} d\zeta = \int_{-l/2}^{l/2} e^0\, d\zeta = l$

$\bar{A} \parallel \bar{i}_z$



$\bar{A}$ лежит в меридиональн пл-ти, найдем проекции на оси $\bar{i}_R$ и $\bar{i}_\theta$

$\bar{A}_\theta$ и $\bar{i}_\theta$ - касат к окр-ти

$\dot{A}_{mR} = \dot{A}_m \cos\theta$ (7)

$\dot{A}_{m\theta} = -\dot{A}_m \sin\theta$ (8)

т.к. A_θ противоположн. i_θ ⇒ (−)

$$\dot{A}_{mR} = \frac{I_0 l}{4\pi}\cos\theta\,\frac{e^{-j\beta R}}{R} \qquad (7')$$

$$\dot{A}_{m\theta} = -\frac{I_0 l}{4\pi}\sin\theta\,\frac{e^{-j\beta R}}{R} \qquad (8')$$

Т.о. получим координаты вектора потенц. элемент. тока в сферич системе координат

т.к. магнитное поле явл-ся потенциальным ⇒

из (4) ур-ие Максвелла:

$$\dot{\bar H}_m = \mathrm{rot}\,\dot{\bar A}_m$$

$$\mathrm{div}\,\dot H = 0 \;!$$

=> поле мы соленоидально / поле без источников / => $\dot H_m$ можно представить как rot:

$$(\bar H = \nabla \times A)$$

нельзя употребл. т.к. ∇ — по д.с.к. а нам нужно в сф с.к.

ССК

$$\mathrm{rot}\,\bar B = \frac{1}{R^2 \sin\theta}\begin{vmatrix} \bar i_R & R\bar i_\theta & R\sin\theta\,\bar i_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ B_R & RB_\theta & R\sin\theta B_\varphi \end{vmatrix}$$

$$\bar B = (B_R, B_\theta, B_\varphi) = B_R \bar i_R + B_\theta \bar i_\theta + B_\varphi \bar i_\varphi$$

$$\dot{\bar A}_m = \frac{I_0 l}{4\pi}\frac{e^{-j\beta R}}{R}\bar i_z$$

$$\dot{\bar A}_{mR} = \frac{I_0 l}{4\pi}\cos\theta\frac{e^{-j\beta R}}{R}$$

$$\dot{\bar A}_{m\theta} = -\frac{I_0 l}{4\pi}\sin\theta\frac{e^{-j\beta R}}{R}$$

$$\dot{\bar H}_m = \mathrm{rot}\,\dot{\bar A}_m = \frac{1}{R^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \bar i_R & R\bar i_\theta & R\sin\theta\,\bar i_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{I_0 l}{4\pi}\cos\theta\frac{e^{-j\beta R}}{R} & -\frac{I_0 l}{4\pi}\sin\theta\frac{e^{-j\beta R}}{R} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{I_0 l}{R^2\sin\theta\, 4\pi}\begin{vmatrix} \bar i_R & R\bar i_\theta & R\sin\theta\,\bar i_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \cos\theta\frac{e^{-j\beta R}}{R} & -\sin\theta\, e^{-j\beta R} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= [\bar i_R\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}[\sin\theta\, e^{-j\beta R}]\right) + R\bar i_\theta\left(\frac{\partial}{\partial R}[\text{illegible}] - \frac{\partial}{\partial\varphi}[\cos\theta\right.$$

$$\left.\cdot\frac{e^{-j\beta R}}{R}]\right) + R\sin\theta\,\bar i_\varphi\left(\frac{\partial}{\partial R}[-\sin\theta\, e^{-j\beta R}] - \frac{\partial}{\partial\theta}[\cos\theta\frac{e^{-j\beta R}}{R}]\right) =$$

$$= \frac{I_0 l}{R^2\sin\theta\,4\pi}\left[R\sin\theta\,\bar i_\varphi\left(-\sin\theta(-j\beta)e^{-j\beta R}\right) - \left\{-\sin\theta\frac{e^{-j\beta R}}{R}\right\}\right] = \frac{+I_0 l\sin\theta\, e^{-j\beta R}}{R\,4\pi}\left(j\beta + \frac{1}{R}\right) =$$

Чтобы убедиться в правильности результ. нужно воспольз. вольтметричную ф-лу.

$$= \frac{I_0 l}{4\pi R}\sin\theta\, e^{-j\beta R}\left(\frac{1+j\beta R}{R}\right) \qquad (9)$$

Семинар №7

$$R \gg \lambda \qquad \frac{R}{\lambda} \gg 1 - \frac{\beta l}{\lambda} \gg 1$$

$$\dot{\bar H}_m(\bar R) = j\beta\frac{I_0 l}{4\pi}\sin\theta\frac{e^{-j\beta R}}{R}\bar i_\varphi \qquad (10)$$

=> магнитное поле имеет хар-р сферической волны в ДЗ

$$\dot{\bar H}_m \parallel \bar i_\varphi$$

$$\dot{\bar H}_m = \dot H_{m\varphi}\bar i_\varphi \qquad (11)$$

$$\dot{\bar H}_m = j\beta\frac{I_0 l}{4\pi}\sin\theta\frac{e^{-j\beta R}}{R} \qquad (12)$$

Найдем вектор электрич поля, для этого воспольз первым ур-м Максвелла.

$$(I)\quad \mathrm{rot}\,\dot{\bar H}_m = j\omega\varepsilon_0\dot{\bar E}_m \qquad \begin{pmatrix}\sigma=0\\ \varepsilon_a=\varepsilon_0\end{pmatrix}$$

$$\dot j_{m.ст}(\bar A) = 0,\quad \sigma = 0,\quad \varepsilon_a = \varepsilon_0$$

$$\dot{\bar E}_m = \frac{1}{j\omega\varepsilon_0}\mathrm{rot}\,\dot{\bar H}_m \qquad (13)$$

т.к. ДЗ → получить ф-лу выводит на раст.

$$\frac{\beta}{4\pi} = \frac{1}{2\lambda} \qquad \left\{\dot{\bar E}_m = -j\frac{I_0 Z_0}{2\lambda}\sin\theta\left(\frac{l}{\lambda}\right)\frac{e^{-j\beta R}}{R}\bar i_\theta\right\} \qquad (14)$$

$$z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi$$

ф-ла (14) - продбрен в-ни чисти ф-лы.

для диполей Герца ф-ла доп-ся строго см. раньше.

$\dot{\bar{E}}_m \parallel \bar{i}_\theta$, φ и R отсутствуют

Единств. отлич. H_m от $\dot{E}_m$, то что в $\dot{\bar{E}}_m$ водержится характ-ка сопротив. z_0 свободного пр-ва.

На основе выр-ий $\dot{E}_m$ и $\dot{H}_m$ получаем основные хар-ры для антенной сист.

$\frac{e^{-j\beta R}}{R}$ учитыв. только в ФН по фазе т.е. ФН хар-н по углу

ФН по полю

$$\dot{F}(\theta,\varphi) = \left.\frac{\dot{E}_m(\theta,\varphi)}{|\dot{E}_m(\theta_0,\varphi_0)|}\right|_{R=const} =$$

от величины расст. на 1-ой и той же дальн.

Из (14) $\Rightarrow$ $\dot{\bar{E}}_m$ не зависит от φ $\Rightarrow$ ФН от φ - цилиндрическое тело вращения вдоль коорд. φ.

$$\dot{\bar{E}}_m(\theta,\varphi) = \dot{\bar{E}}_m(\theta)$$

$$|\dot{E}_m(\theta_0)| = 1 \cdot \frac{I_0 z_0}{2}\,\frac{l}{\lambda}\,\frac{1}{R}$$

$\max \dot{E}_m(\theta,\varphi)$

$\sin\theta = 1$ в max

$$\boxed{\dot{F}(\theta,\varphi) = \frac{j\frac{I_0 z_0}{2}\frac{l}{\lambda}\sin\theta\,\frac{1}{R}}{\frac{I_0 z_0}{2}\frac{l}{\lambda}\frac{1}{R}} = j\sin\theta} \quad (15)$$

$$\dot{F}(\theta) = F(\theta)\, e^{j\Phi(\theta)} \Rightarrow$$

$$j = e^{j\pi/2}$$

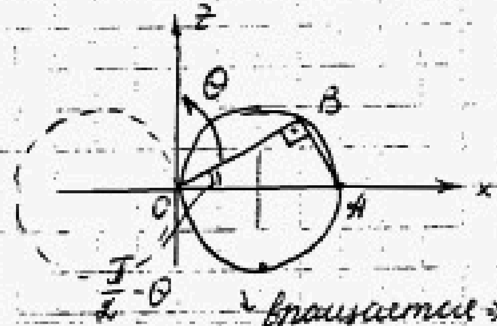
$\Rightarrow$ $\left\{ \dot{F}(\theta) = \sin\theta\, e^{j\pi/2} \quad (16) \right\}$

АФН $\quad F(\theta) = |\dot{F}(\theta)|$

$0 \le \theta \le \pi$, а $\sin \ge 0$ в этой части $\Rightarrow$ модуль можно не писать.

Из (16) $\Rightarrow$ ФН и $\dot{\bar{E}}_m$ не во направлениях θ и φ равноценно в диполях Герц.

АФН $\quad F(\theta) = \sin\theta$, изобр. в п.с.к.



На отрезке ОА кругу по единицу приводим окр-ть $R = 1/2$

$$OB = OA\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = OA\sin\theta$$

$$F(\theta) = OB = 1\cdot\sin\theta = \sin\theta$$

при вращается в разрезе $\Rightarrow$ в экватор пл-ти - окр-ть, в пр-ве - тор, сечение XOY - окр-ть единичн. рад.

описыв. в меридиональн. пл-ти

$\Rightarrow$ направл. θ не равнозначны. т.е. поле излуч. диполей Герца зависит от угла θ $\Rightarrow$ изл-ие неоднородным. В направл., совпад. с продольн. осью "-" 0, max излуч. под углом $\pi/2$, т.е. по нормали диполей Герц.

Закономерность:

В направл. 1-ой апертуры излуч. $\forall$ антенны всегда максимально, синфазно можно.

Фазовая хар-ка $\Phi(\theta) = \frac{\pi}{2}$

План действий:

1. Вектор потенц. (D)
2. КН2
3. Активн. излуч. (R_Σ)
4. ОН по пол.

Вычислим комплексный вектор Пойнтинга

$$\dot{\bar\Pi} = \frac{1}{2}\dot{\bar E}_m \times \dot{\bar H}^* \quad (18)$$

$\bar i_R \perp \bar i_\theta$, $\bar i_R \perp \bar i_\varphi$, $\bar i_\theta \perp \bar i_\varphi$ — локальная система, в кажд. т. наблюдения своя локальная система

$\bar i_R \to \bar i_\theta \to \bar i_\varphi$

$$\dot{\bar\Pi} = \frac12 \begin{vmatrix} \bar i_R & \bar i_\theta & \bar i_\varphi \\ 0 & \dot E_{m\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \dot H^*_{m\varphi}\end{vmatrix} =$$

$$= \frac12 \bar i_R \dot E_{m\theta} \dot H^*_{m\varphi} = \frac12 \bar i_R (-1) \frac{I_0^2 z_0}{4}\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \sin^2\theta \frac{1}{R^2}$$

$$= \frac{I_0^2 z_0}{8R^2}\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \sin^2\theta\, \bar i_R \quad (19)$$

КНД

∃ 2 разных опр-ия КНД

1 определение $D = \frac{\Pi_{ср}^{max}(\theta,\varphi)}{\Pi_{ср}^{равн}}\Big|_{R=const,\ P_\Sigma^{равн}=P_\Sigma^{изотр}}$

– отнош. max знач. вектора П, усредненного за период частоты, к ППП в предполож., что он соотв. изотропной

В кач-ве так. антенны приним. изотропная ант — во всех направл. одно и то же значение вект Пойнтинга.

$$\bar\Pi_{ср} = Re\{\dot{\bar\Pi}\}$$

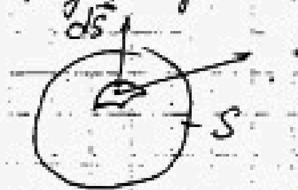
· В ДП [illegible] $\Pi = 0$

P_Σ – мощн. излуч. ант.

⇒ из (19) ⇒ $\bar\Pi_{ср} = \dot{\bar\Pi}$

$$\boxed{P_{\Sigma,ср} = \oint_S \bar\Pi_{ср}\cdot d\bar S}$$

мощн. излуч. дип. Г. средн. за период



$d\bar S$ – нормаль; S – ∀ произв. замкн. пов-ть

$\bar i_n$ – хар-т направл. внешн. норм. к площадке

в кач-ве S можно брать ∀ пов-ть, для ДГ удобно брать сферу с центром в центре апертуры.

$$d\bar S = dS\,\bar i_n$$

Для сферы dS эл-т пов-ти будет $d\bar S \parallel \bar i_R$, (касат. ⊥ радиусу окр-ти в ∀ т.)

Внешн. нормаль будет направл. по радиусу.

$$\dot{\bar\Pi} = \bar\Pi_{ср} \parallel \bar i_R$$

$$\bar i_R\cdot\bar i_R = \bar i_R^2 = 1.$$

⇒ $P_{\Sigma,ср} = \int\limits_{S=4\pi,\ R\to\infty} \Pi_{ср}\,dS$, вместо скал. произв. ⇒ произв. модулей.

$dS = R^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$, док-ть.

$$P_{\Sigma,ср} = \frac{I_0 z_0}{8R^2}\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 R^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin^3\theta\,d\theta\,d\varphi$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin^3\theta\,d\theta\,d\varphi = \int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin^3\theta\,d\theta = 2\pi\cdot\frac43 =$$

$$\int_0^{\pi}\sin^3\theta\,d\theta = -\int_0^{\pi}(1-\cos^2\theta)\,d\cos\theta = \int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta - \int_0^{\pi}\cos^2\theta\,d\theta =$$

$$= \cos\theta\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{1-\cos2\theta}{2}\,d\theta = -2 - \frac12\,\sin2\theta\Big|_0^{\pi} = \frac{8}{3}$$

 $z_0 = 120\pi$

$$= \frac{I_0^2 z_0 \pi}{3}\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 = 40\pi^2 I_0^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2$$

$$\boxed{\Pi_{ср}^{равн} = \frac{P_\Sigma}{4\pi R^2}} = \frac{I_0^2 z_0}{12 R^2}\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \quad (3)$$

По ф-ле (19)

при max знач $\theta = \frac{\pi}{2}$

модуль вект. Пойнт. излуч-ие за период $\Pi_{ср}^{max} = \frac{I_0^2 z_0}{8 R^2}\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \quad (1) \Rightarrow \Pi_{ср.max} = \frac{I_0^2 z_0}{8R^2}\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2$

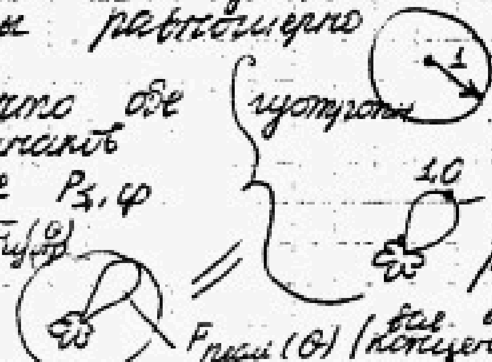
$$P_{\Sigma ср} = \frac{I_0^2 z_0 \pi}{3}\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \quad (2)$$

1-е определ КНД

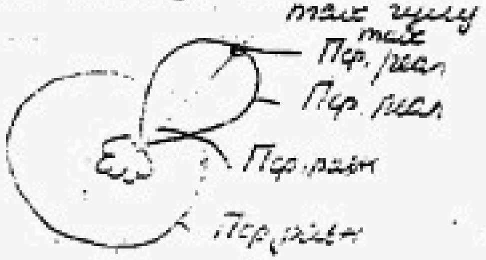
$$D \triangleq \frac{\Pi_{ср.max}^{реал}}{\Pi_{ср}^{изотр}}\Bigg|_{\substack{R=const \\ P_{\Sigma ср}=const}} \quad (4)$$

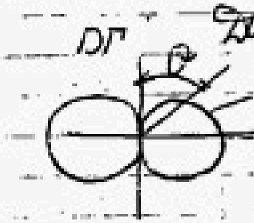
Опр-ся как рядом сравнение направ св-в нормальн ант с эталонн ант, в кач-ве которой гипотетическ изотропн ант, излуч во все стороны равномерно

Предпол-ся, что обе изотропн / реальн ант. имеют одинаков мощн излучение $P_{\Sigma ср}$



По (4) фигурир пл-ти потоков мощн-ти, поэтому эту рис. перерис в поток мощн:





по ф-ле (4) вычислим

КНД диполя Герц $D = \frac{I_0^2 z_0 (l/\lambda)^2 R^2 12}{8R^2 I_0^2 z_0 (l/\lambda)^2} =$

$$= \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = \underline{\underline{1,5}}\ !$$

Замечание: КНД современн ант. достиг 10 - 100 - 100000, поэтому ДГ явл слабо направл излучателем. Впрочем по своим направл св-вам к изотропн ант. Только вдоль оси, на которой он расположен излучение отсутств.

Сопротивление излучения ДГ.

Рассм. ф-лу (2) мощности излуч. ⇒

$$P_{\Sigma ср} \geq 0$$

Мощн излучен напоминает тепловую мощн. (эл. аналогия) в соотв з-н Джоуля - Ленца -

мощн, рассеив по некот сопр-ии R_Σ → сопр-ие излучен [Ом]

$$P_{\Sigma ср} = \frac{I_0^2 R_\Sigma}{2} \quad (6)$$

Сопоставим (2) и (6) найдем R_Σ для случая ДГ:

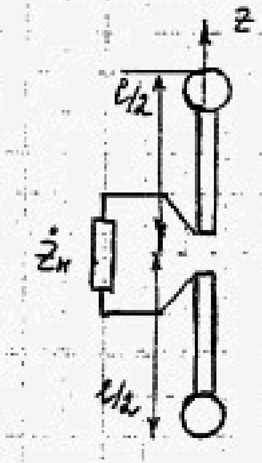
$$\frac{I_0^2 R_\Sigma}{2} = \frac{I_0^2 z_0 \pi}{3}\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \Bigg|_{z_0 = 120\pi}$$

$$R_\Sigma = 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \quad (7)$$

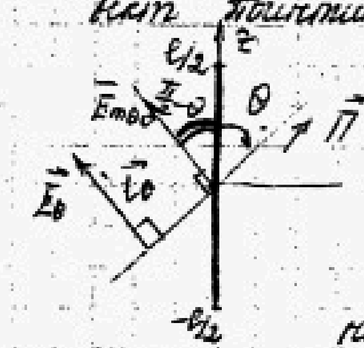
Из (6) ⇒ если $I_0 = const$, то мощн излуч тем больше, чем больше сопрот излуч. Нужно увелич. излуч мощн.

Работа ДГ в режиме ПРМ.

приемн. ант.



расм в ДЗ ⇒ поэтому направл распр-ия волны совп с направл вект Пойнтинга.



угол θ – хар-т направл прихода эл волн т.е. вект. $\vec{\Pi}$.

$$\vec{E} = \vec{E}_\theta = E\,\vec{i}_\theta \quad (1)$$

$$\dot{E}_{\theta 0} = E_{m\theta 0}$$

ду точки напряж в середине диполя

Найдем касат составл вект $\vec{E}_\theta$ на составл. диполя.

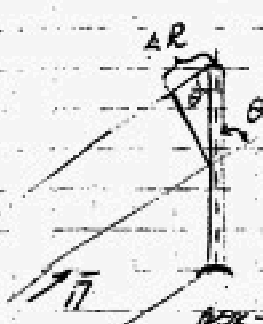
$$E_{m\tau} = \left\{ \begin{array}{l} E_{m\theta 0}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \\ E_{m\theta 0}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right) \end{array} \right\} = E_{m\theta 0}\sin\theta.$$

ДГ предполаг-ся изготовл из идеальн проводника, поэтому под действ касат составл. (силы, действ вдоль проводн, своб эл-ны) ее приобрет хар-р регулярного движения, если диполь замкнут на нагрузку, то по нему потечет ток. Под действ внешн поля $\vec{E}$ в ДГ своб. электр. получ. представл. упорядоч движ. $\bar{e}$. В раздел ограничения условие будет так-го, что в случае идеальн проводн. касат составляющ полного электрич поля $\vec{E}$ равняется нулю, поэтому касат составл внешнего поля удобно быть уравновешена составл электрич поля неэлектр. сторонней. Сторон электрич поле соверш работу по переносу заряда от меньшего потенц к большему и эта работа пол-ся ЭДС (хар-ка этих сторонних сил).

Под действ. внешн. электр поля в ДГ наводится ЭДС E_{xx}.

$$E_{xx} = \int_{-l/2}^{l/2} \bar{E}_m^{ст}\, dl = \int_{-l/2}^{l/2} (-)E_{m\tau}\, dl = -E_{m\theta 0}\sin\theta\, l$$

т.к. вектор напряж сторон сил направлен ей встречу падающ волны



док-м, что $\max|\Delta\varphi| \ll 1$ и ей сильно

$\max|\Delta R| = \frac{l}{2}\cos\theta$

$\max|\Delta\varphi| = |\beta\Delta R| = |\beta\frac{l}{2}\cos\theta|$

$(l \ll \lambda)$

$\dot{Z}_a$ – вх сопротивл ант в режиме ПРД

$\dot{Z}_н$ – вх сопротивл нагрузки

На основан з-на Ома:

$$\dot{I}_0 = -\frac{E_{m\theta 0}\sin\theta\, l}{\dot{Z}_a + \dot{Z}_н} \quad (4)$$

Понятие ФН антенны в режиме ПРМ

Ранее было, что ФН в прд режиме — нормирован по max излучению, т.е.

$$\dot{F}(\theta,\varphi) = \frac{\dot{E}_m(\theta,\varphi)}{|\dot{E}_m(\theta_0,\varphi_0)|}$$

направл max излучен

В режиме прм ФН хар-т зав-ть ~~нормиров~~ ЭДС нормированной по max от направления прихода падающей плоской волны.

по (3) $E_{xx} = -E_{m\theta 0}\sin\theta\cdot l$

$E_{xx} = E_{xx}(\theta)$ явл-ся ф-ей угла θ

$$\max E_{xx} = E_{xx}(\theta_0) = -E_{m\theta 0}\, l, \quad \theta_0 = \frac{\pi}{2}$$

Амплит ФН:

$$F(\theta) = \frac{|E_{xx}(\theta)|}{\max|E_{xx}|} = \sin\theta \quad ! \quad (5)$$

Замечание: ранее док-но, что в режиме прд множитель ФН

$$\dot F(\theta) = j\sin\theta$$

$$|\dot F(\theta)| = \sin\theta \quad (6)$$

1) Из (4) и (5) ⇒, что амплит ФН ДП в режиме при, такие же как в режиме прд

2) Эта закон-ть имеет общий хар-р, т.е. справедлива для ∀ антенных систем. В теории ант док-ся, что компл вект ФН

$$\dot{\bar F}(\theta,\varphi) \text{ в режиме при и прд}$$

одна и та же.

3) Различия закл-ся в том, что в прд режиме ант. возб-ся сосредоточенной ЭДС, а в режиме при — падающей эл.м волной, которая наводит в при ант распределенную ЭДС.

Доказать:

$$div(\bar a\times\bar b) = \bar b\cdot rot\,\bar a - \bar a\cdot rot\,\bar b \quad (1)$$

$$d(uv) = du\cdot v + u\,dv \quad (2) \quad ?$$

Док-во:

$$d(uv) = d(u\cdot v_c + u_c v) = d(uv_c) - d(u_c v) =$$

индекс означ, что при применении операц дифф-ния множитель сч-ся const

док-ть в коорд форме, стр.

$$= du\cdot v_c + u_c\,dv = du\,v + u\,dv$$

стираем индекс ч.т.д.

Применим эту методику при док-ве соотношения (1)

добавим индекс "с"

$$div(\bar a\times\bar b) = \nabla\cdot(\bar a\times\bar b) = \nabla\cdot(\bar a\times\bar b_c + \bar a_c\times\bar b) =$$

Оператор пространств дифф-ния

$$= \nabla\cdot(\bar a\times\bar b_c) + \nabla(\bar a_c\times\bar b)$$

Применим к набла вектор св-ва

$$\nabla\cdot(\bar a\times\bar b_c) = (\nabla\times\bar a)\cdot\bar b_c = \bar b_c\cdot(\nabla\times\bar a) =$$

смешанн произв — раскрыв как вектор

$$\nabla\cdot(\bar a_c\times\bar b) = -\nabla(\bar b\times\bar a_c) = -(\nabla\times\bar b)\cdot\bar a_c$$

стираем инд "с"

$$div(\bar a\times\bar b) = \bar b_c\cdot(\nabla\times\bar a) - \bar a_c\cdot(\nabla\times\bar b) =$$

$$= \bar b\cdot(\nabla\times\bar a) - \bar a\cdot(\nabla\times\bar b).$$

Лекция. 23.11.2006

$$a(t)\cdot b(t) = Re\left\{\frac{\dot A_m\cdot\dot B_m^*}{2}\right\} + Re\left\{\frac{\dot A_m\cdot\dot B_m}{2}e^{j2(\omega t-\bar\beta\cdot\bar R)}\right\} \quad (1)$$

$$a(t) = A_m\cos(\omega t - \bar\beta\cdot\bar R + \psi_a),$$

$$b(t) = B_m\cos(\omega t - \bar\beta\cdot\bar R + \psi_b);$$

$$\dot A_m(\bar R) = \dot A_m e^{-j\bar\beta\cdot\bar R}$$

$$\dot A_m = A_m e^{j\psi_a}$$

$$\dot B_m = B_m e^{j\psi_b}$$

Итог знач-ие $a(t) = b(t)$

$$a^2(t) = Re\left\{\frac{|\dot A_m|^2}{2}\right\} + Re\left\{\frac{\dot A_m^2}{2}e^{j2(\omega t-\bar\beta\cdot\bar R)}\right\}$$

$$= \frac{|\dot A_m|^2}{2} - \frac{A_m^2}{2}\cos[2(\omega t-\bar\beta\cdot\bar R)+\psi_a] =$$

$$= \frac{A_m^2}{2} - \frac{A_m^2}{2}\cos[2(\omega t - \bar\beta\cdot\bar R + \psi_a)].$$

Ф-ла (1) описыв процесс скалярн ф-ий, она может быть положена в основу соотв-ств векторн процесс, получающиеся формулы аналогичны ф-ле (1)

$$\bar a(t)\cdot\bar b(t) = Re\left\{\frac{\dot{\bar A}_m\cdot\dot{\bar B}_m^*}{2}\right\} + Re\left\{\frac{\dot{\bar A}_m\cdot\dot{\bar B}_m}{2}e^{j2(\omega t-\bar\beta\bar R)}\right\} \quad (5)$$

$$= Re\left\{\frac{\dot{\bar A}_m(\bar R)\cdot\dot{\bar B}^*(\bar R)}{2}\right\} + Re\left\{\frac{\dot{\bar A}_m(\bar R)\cdot\dot{\bar B}_m(\bar R)}{2}e^{j2\omega t}\right\} \quad (6)$$

$$\bar a(t)\times\bar b(t) = Re\left\{\frac{\dot{\bar A}_m(\bar R)\times\dot{\bar B}^*(\bar R)}{2}\right\} + Re\left\{\frac{\dot{\bar A}_m(\bar R)\times\dot{\bar B}(\bar R)}{2}e^{j2\omega t}\right\} =$$

$$= Re\left\{\frac{\dot{\bar A}_m\times\dot{\bar B}_m^*}{2}\right\} + Re\left\{\frac{\dot{\bar A}_m\times\dot{\bar B}_m}{2}e^{j2(\omega t-\bar\beta\cdot\bar R)}\right\}$$

$$\bar a(t) = Re\{\dot{\bar A}_m(\bar R)e^{j\omega t}\} = Re\{\dot{\bar A}_m e^{j(\omega t-\bar\beta\cdot\bar R)}\}$$

$$\bar b(t) = Re\{\dot{\bar B}_m(\bar R)e^{j\omega t}\}$$

Ф-лы (5)-(8) получены на основе (1). Эти ф-лы использ в радиолокации и электродинамике.

З-н сохранения энергии

в электродинам постулир-ся, т.е. явл-ся ф-лой обобщения бесконечн числа экспериментов, ни один из которых не опроверг его.

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -P_п + P_\Sigma + P_{ст} \quad (1)$$

$W = W(\bar R,t)$ мощность эл. поля — хар-т скорость изменен энергии эл. поля

$P_п = P_п(\bar R,t)$ – мощность потерь [Вт]

$P_\Sigma = P_\Sigma(\bar R,t)$ – мощн излучения, вытекающ (−) из точки или втекает (+) которую

$P_{ст} = P_{ст}(\bar R,t)$ – мощность сторонних источников энергии.

(1): изменение энергии в точке может быть вызвано 1-ой из трёх причин: тепловые потери, втекан или вытек излуч, мощн сторонн токов.

Баланс мгновенных мощностей

Конкретизируем (1) на основе ур-ий Максвелла. Как получить которую док-во не явл-ся. Приведенное ниже док-во ф-л БЭ, т.к. ур-ия М. сами явл-ся следствием этого з-на.

$$\bar E = \bar E(\bar R,t) \qquad \bar J_{ст} = \bar J(\bar R,t)$$

$$\bar H = \bar H(\bar R,t)$$

(I) $\operatorname{rot}\bar H = \sigma\bar E + \varepsilon_a\frac{\partial\bar E}{\partial t} + \bar J_{ст}$ | $(-\bar E)$ ⇒

(II) $\operatorname{rot}\bar E = -\mu_a\frac{\partial\bar H}{\partial t}$ | $(\bar H)$

Дальнейш док-во использ ф-лу (2)

$$\operatorname{div}(\bar a\times\bar b) = \bar b\cdot\operatorname{rot}\bar a - \bar a\cdot\operatorname{rot}\bar b \quad (2)$$

$$\operatorname{div}(\bar E\times\bar H) = \bar H\cdot\operatorname{rot}\bar E - \bar E\cdot\operatorname{rot}\bar H = (3)$$

$$= \operatorname{div}(\bar E\times\bar H) \qquad \bar H\cdot\operatorname{rot}\bar E - \bar E\cdot\operatorname{rot}\bar H = -\sigma\bar E\cdot\bar E - \varepsilon_a\bar E\cdot\frac{\partial\bar E}{\partial t}$$

использ св-ва скал. произв век

$$-\bar E\cdot\bar J_{ст} - \mu_a\bar H\cdot\frac{\partial\bar H}{\partial t} =$$

$$= -\sigma \bar E^2 - \frac{1}{2}\left(\varepsilon_a \frac{\partial \bar E^2}{\partial t} + \mu_a \frac{\partial \bar H^2}{\partial t}\right) - \bar E\,\bar J_{ст} \quad (4)$$

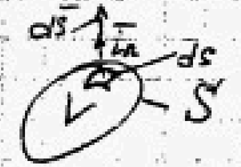
т.к. $\bar E \cdot \bar E = \bar E^2$

$\bar H \cdot \bar H = \bar H^2$

$$\frac{\partial \bar H^2}{\partial t} = 2\bar H \frac{\partial \bar H}{\partial t}; \quad \frac{\partial \bar E^2}{\partial t} = 2\bar E \cdot \frac{\partial \bar E}{\partial t}$$

с эквивалентн. представы ф-л Макс, справедл. в тек. R и t.

$d\bar S = dS \cdot \bar i_n$



Пр-во, ограничен S

$$\int_V div(\bar E \times \bar H)\,dV = -\int_V \sigma \bar E^2 dV - \int_V \left(\frac{\varepsilon_a}{2}\frac{\partial \bar E^2}{\partial t} + \frac{\mu_a}{2}\frac{\partial \bar H^2}{\partial t}\right) dV - \int_V \bar E \cdot \bar J_{ст}\,dV \quad (5)$$

Применим к инт-лу в левой части ф-лу Гаусса - Остроградского.

$$\int_V div(\bar E \times \bar H)\,dV = \oint_S (\bar E \times \bar H) \cdot d\bar S \quad (6)$$

$$\oint_S (\bar E \times \bar H) \cdot d\bar S = -\int_V \sigma \bar E^2 dV - \int\left(\frac{\varepsilon_a}{2}\frac{\partial \bar E^2}{\partial t} + \frac{\mu_a}{2}\frac{\partial \bar H^2}{\partial t}\right) dV - \int_V \bar E \cdot \bar J_{ст}\,dV \quad (7)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \int_V \left(\frac{\varepsilon_a}{2}\frac{\partial \bar E^2}{\partial t} + \frac{\mu_a}{2}\frac{\partial \bar H^2}{\partial t}\right) dV \quad (8)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\int_V \Big(\underbrace{\frac{\varepsilon_a \bar E^2}{2}}_{\text{энергия эл-го поля}} + \underbrace{\frac{\mu_a \bar H^2}{2}}_{\text{энергия магнитн. поля}}\Big) dV \quad (9)$$

$$W = \int_V \frac{\varepsilon_a \bar E^2 + \mu_a \bar H^2}{2}\,dV \quad (10)$$

$W = W(t)$ — энергия ф-ия времени э-н поля

по з-ну Джоуля - Ленца

I $\quad P_n = \int_V \sigma \bar E\,dV = \int_V \bar J_{пр} \cdot \bar E\,dV = \left| \bar J_{пр} = \sigma \bar E \right|$

нужно пом-ть, что P_n - потом, $\frac{P_n}{\text{ток в провод.}}$ созд-ся под действ. электрич. поля. причем поле отдает энергию

т.к. поле действ. на поток е, е ускоряются, поле $\bar E$ должно содержать касательн. составляющая $\bar J_{пр} \cdot \bar E \geq 0 \Rightarrow P_n \geq 0$

инт-л это энергию ф-ии

Если есть резистивн. сопротивл. $P_n > 0$ ($\exists$ диссипативн. составл.) иначе $P_n = 0$

II $\quad P_{ст} = -\int_V \bar E \cdot \bar J_{ст}\,dV = /$

плотность сторон. токов — токи, возбуждающие эти поле; при этом токи отдают свою энергию эл. полю $\Rightarrow$ в проводящ. среде пе-кущие токи заряды (в случае наличия в $\bar E$ возбужд-ца поля) составляющая направл-ии проекции вектора $\bar E$ противоположн. $\bar J_{ст} \Rightarrow \bar E \cdot \bar J_{ст} \leq 0$

$\int \bar E\,\bar J_{ст} < 0 \Rightarrow -\int_V \bar E\,\bar J_{ст}\,dV > 0$

из приведенн. рисунка видно, что Θ вертим, чтобы сделать мощность $P_{ст}$ положительной

III Излучаем. мощн.

$$P_\Sigma = \oint_S \bar E \times \bar H\,d\bar S \quad (12)$$

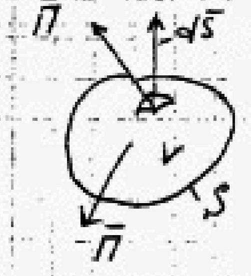
т.к. векторное произв. под знаком инт-ла представл. собой вектор.

$$\bar \Pi \triangleq \bar E \times \bar H \quad (13)$$

$$P_\Sigma = \oint_S \bar{\Pi}\cdot d\bar{S} = \Phi_{\Pi}$$

представл. поток вектора $\bar{E}$ Φ_{Π} через замкн. пов-ть S — $|\bar{\Pi}|$ энергии, которая в единицу времени проходит через единицу пов-ти.

Для теории ант. наибольш. инт-с представл. случай, когда $\bar{\Pi}$ вытекает из объема S



$\bar{\Pi}\cdot d\bar{S} > 0$, т.к. угол между ними острый

В случае излучения

$$P_\Sigma \ge 0$$

вытекает из расс. объема, т.е. этот объем излучает эл. магн.

Рассм-ны все компоненты ф-лы (1), установим их физический смысл

Частные случаи (1), представл. интерес для дальнейшего

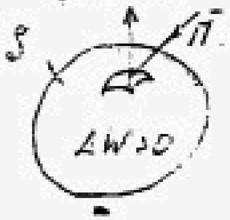
1) $\sigma = 0$ среда явл-ся диэлектрик, сторон. токи отсутств. $\bar{J}_{cm} = 0$

Ф-ла (1) приобр-т вид.

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -P_\Sigma \qquad (15)$$

явл-ся полным аналогом з-на сохран. заряда в интегральн. форме

Рассм 2 случая:



I. $\Delta W > 0$ $\quad \frac{\partial W}{\partial t} > 0$

увеличение запаса энергии внутри объема V.

т.к. $J_{cm} = 0$

$\Rightarrow$ увелич. запаса энергии

явл. втекание энергии из внешнего пр-ва в заданный объем.

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta W}{\Delta t} > 0$$

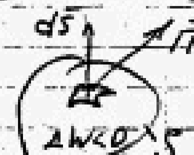
при таком располож. векторов

$$\bar{\Pi}\cdot d\bar{S} < 0$$

$\oint < 0 \Rightarrow$ ставим $\ominus$ эти уравнения

II $\Delta W < 0$ $\quad \frac{\partial W}{\partial t} < 0$

Единств. мех-м ум-я энергии явл-ся ее вытекан. из объема S



$\bar{\Pi}\cdot d\bar{S} > 0$, т.к. острый угол между ними

чтобы уравнять эти 2 части нужен $\ominus$.

Алгоритм вычисления

$$\frac{1}{T}\int_0^T a(t)\cdot b(t)\,dt \qquad (17) \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad (18)$$

период высокой частоты

$$a(t) = A_m\cos(\omega t - \bar{\beta}\cdot\bar{R} + \psi_a)$$

Используя ф-лу (2) 1-ой части лекции:

$$a(t)\cdot b(t) = \underbrace{\overline{a(t)\,b(t)}}_{\text{постоянная часть}} + \underbrace{\widetilde{a(t)}\,\widetilde{b(t)}}_{\text{переменная часть пропорц.}} \qquad (16)$$

$$a(t)\cdot b(t) = Re\left\{\frac{\dot{A}_m\cdot\dot{B}_m^*}{2}\right\} + Re\left\{\frac{\dot{A}_m\,\dot{B}_m}{2}\,e^{j2(\omega t - \bar{\beta}\cdot\bar{R})}\right\} \qquad (6)$$

Применим

$$\frac{1}{T}\int_0^T$$

Лекция 21.11.2006 (Глазков)

$$\Pi_{ср} = \frac{I_0^2 Z_0}{8r^2}\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \sin^2\theta \quad (1)$$

$$P_{\Sigma,ср} = \frac{I_0^2 Z_0 \pi}{3}\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \quad (2)$$