**Галкин С. В.**

# Краткий курс математического анализа в лекционном изложении

**для студентов МГТУ им. Н. Э. Баумана**

**(второй семестр)**

**М. 2002г.**

**Лекция 1 Неопределенный интеграл, таблица интегралов.**

Функция $F(x)$ называется **первообразной** для функции $f(x)$, если $F'(x)=f(x)$.

**Теоремы о первообразных.**

**Теорема**. Если $F(x)$ - первообразная для функции $f(x)$, то $F(x)+C$ ($C$ - константа) - тоже первообразная для функции $f(x)$.

Доказательство. $(F(x)+C)'=(F(x))'+C'=f(x)$.

**Теорема.** Пусть $F(x), G(x)$ - две первообразных для функции $f(x)$, тогда они различаются на некоторую константу ( $F(x)-G(x)=C$ - константа).

Рассмотрим функцию $V(x)=F(x)-G(x)$, она непрерывна и дифференцируема на всей числовой оси, как и функции $F(x), G(x)$. Тогда для любых конечных значений $x_{1,} x_2$ $(x_2>x_1)$ по формуле конечных приращений Лагранжа

$V(x_2)-V(x_1)=V'(c)(x_2-x_1)=(F'(c)-G'(c))(x_2-x_1)=(f(c)-f(c))(x_2-x_1)=0$.

Следовательно, $V(x)\equiv C, \quad F(x)-G(x)=C$.

**Неопределенным интегралом** $\int f(x)dx$ (интеграл от функции $f(x)$ по $dx$ ) называется совокупность всех первообразных функций для функции $f(x)$.

$\int f(x)dx=F(x)+C$.

Функция $f(x)$, стоящая под знаком интеграла, называется подинтегральной функцией, а выражение $f(x)dx$ - подинтегральным выражением..

**Свойства неопределенного интеграла.**

Свойства неопределенного интеграла можно условно разделить на две группы. В первую группу собраны свойства, вытекающие из того, что *интегрирование – операция, обратная дифференцированию*. Во вторую группу собраны *свойства линейности*. Эти свойства вытекают из того, что интегрирование, как и дифференцирование – линейная операция и определяют линейную операцию.

*Первая группа свойств.*

1) $\frac{d}{dx}\int f(x)dx=f(x)$.

2) $\int \frac{d}{dx} f(x)dx=f(x)+C$

3) $d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx$

4) $\int df(x)=f(x)+C$.

*Докажем первое свойство.*

Так как $\int f(x)dx = F(x)+C$, *то* $\frac{d}{dx}\int f(x)dx = \frac{d}{dx}\left(F(x)+C\right) = \frac{dF(x)}{dx} = f(x).$

Здесь $F(x)$- первообразная для $f(x)$.

*Докажем второе свойство.*

Обозначим $g(x) = \frac{df(x)}{dx} = f'(x), \Phi(x) = \int g(x)dx.$ Тогда $f'(x) = g(x)$, а $\Phi'(x) = g(x)$ по первому свойству. Поэтому функции $\Phi(x), f(x)$ являются первообразными для функции $g(x)$. Следовательно, по теоремам о первообразных, они различаются на константу, т.е. $\Phi(x) = f(x)+C$ или $\int \frac{d}{dx} f(x)dx = f(x)+C.$

Третье свойство следует из первого: $d\left(\int f(x)dx\right) = \frac{d\left(\int f(x)dx\right)}{dx}dx = f(x)dx.$

Четвертое свойство следует из второго, если вспомнить, что с дифференциалом первого порядка можно обращаться как с алгебраическим выражением (свойство инвариантности формы записи первого дифференциала).

Поэтому надо доказать два первых свойства.

*Вторая группа свойств.*

1) свойство суперпозиции $\int (f_1(x)+f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$
2) свойство однородности $\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$.

Доказательства того и другого свойств проводятся аналогично. Дифференцируем (по свойствам первой группы) левую и правую часть равенства, приходим к тождеству. Затем из теорем о первообразных заключаем, что левая и правая часть равенства, как первообразные одной и той же функции, различаются на константу. Эта константа может быть формально включена в неопределенный интеграл в левой или правой части равенства.

Для того, чтобы вычислить интеграл от функции, проще всего «угадать» первообразную для этой функции по таблице для производных, переписав эту таблицу в обратном порядке. Запишем *интегралы для основных элементарных функций.*

1) $\int x^{\mu}dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C,\ \mu \neq -1.$

   $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,\ \int\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx = \frac{1}{x}+C,\ \int\frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x}+C.$ Эти формулы лучше запомнить, они очень часто встречаются.

2) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+C, \quad \int e^x dx = e^x + C.$

3) $\int \cos x dx = \sin x + C, \int \sin x dx = -\cos x + C, \int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C, \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C.$

4) $\int chx dx = shx + C, \int shx dx = chx + C, \int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C, \int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C.$

Справедливость этих формул легко проверить, дифференцируя правую часть соотношения и получая подинтегральную функцию.

**Лекция 2. Методы интегрирования и таблица интегралов.**

Метод **подведения под дифференциал.**

Пусть известен интеграл $\int f(x)dx = F(x) + C$ ( $F(x)$- первообразная для функции $f(x)$). Тогда $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d\varphi(x) = F(\varphi(x)) + C.$

Главное здесь – «догадаться», как $f(x)dx$ представить в виде $f(\varphi(x))d\varphi(x)$.

Доказательство. $\frac{dF(\varphi(x))}{dx} = \frac{dF}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dx} = f(\varphi(x))\varphi'(x)$ по теореме о сложной функции. Следовательно, функция $F(\varphi(x))$ и $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$ являются первообразными для функции $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ и, по теоремам о первообразных, различаются на константу.

Этот метод применяется часто. Например, $\int \cos(\ln x)\frac{1}{x}dx = \int \cos(\ln x)d(\ln x) = \sin(\ln x) + C$, $\int \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}dx = -\int d\left(e^{\frac{1}{x}}\right) = -e^{\frac{1}{x}} + C$ .

Метод **замены переменной.**

Это – универсальный метод, метод подведения под дифференциал является частным случаем метода замены переменной.

**Теорема.** Пусть функция $x = u(t)$ непрерывно дифференцируема в некоторой области и имеет непрерывно дифференцируемую обратную функцию $t = u^{-1}(x)$. Тогда $\int f(x)dx = \int f(u(t))u'(t)dt$, где $t = u^{-1}(x)$.

Доказательство. Дифференцируя обе части, используя теоремы о производной сложной функции и инвариантность формы записи первого дифференциала, получим тождество дифференциалов.

$f(x)dx = f(x)d(u(t)) = f(u(t))u'(t)dt$ , где $t = u^{-1}(x)$. Из него следует равенство интегралов в левой и правой частях.

Заметим, что требования к обратной функции нужны, чтобы суметь возвратиться обратно, от переменной $t$ к переменной $x$ .

Для вычисления интегралов вида $\int u(x)dv(x)$, если вместо него удобно вычислять интеграл $\int v(x)du(x)$, пользуются методом **интегрирования по частям.**

$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x)$- $\int v(x)du(x)$,

если интегралы в обеих частях соотношения существуют.

Докажем справедливость этой формулы. Дифференцируя произведение функций, получим $d(u(x)v(x)) = v(x)du(x) + u(x)dv(x)$, или

$u(x)dv(x) = d(u(x)v(x)) - v(x)du(x)$.

Интегралы левой и правой частей существуют( $\int d(u(x)v(x)) = u(x)v(x) + C$ ).

Интегрируя, получим нужное соотношение.

Примеры.

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int x d\ln x = x\ln x - x + C$$

$$\int x\ln x dx = \int \ln x d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2 \ln x}{2} - \int \frac{x^2}{2} d\ln x = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C .$$

$$\begin{pmatrix} u = \ln x & dv = xdx \\ du = \frac{1}{x}dx & v = \frac{x^2}{2} \end{pmatrix}$$

$$\int x\cos x dx = \int x d\sin x = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C$$

Вычислим интегралы $\int e^x \cos x dx$ , $\int e^x \sin x dx$ .

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx , \quad \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$$

$$\begin{pmatrix} u = e^x & dv = \sin x dx \\ du = e^x dx & v = -\cos x \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} u = e^x & dv = \cos x dx \\ du = e^x dx & v = \sin x \end{pmatrix}.$$

Теперь, подставляя второй интеграл в первый, получим

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x).$$

Аналогично, подставляя первый интеграл во второй, получим

$$\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x).$$

Пополним таблицу интегралов, применяя методы интегрирования (в первой лекции получены четыре интеграла).

5. $$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$$

6. $$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\int \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)dx = \frac{1}{2a}(\ln|x-a| - \ln|x+a|) + C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

7. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

8. $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \int \frac{\sqrt{x^2 + a}\ \ dt}{\sqrt{x^2 + a}\ \left(x + \sqrt{x^2 + a}\right)} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x + \sqrt{x^2 + a}| + C$$

Здесь сделана замена переменной, подстановка $\sqrt{x^2 + a} = t - x$ - одна из подстановок Эйлера,

$$\frac{2x\,dx}{2\sqrt{x^2+a}}=dt-dx\,,\;dx\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}+1\right)=dt\,,\;dx=\frac{\sqrt{x^2+a}}{x+\sqrt{x^2+a}}\,dt\,.$$

9. $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int a^2\cos^2 t\,dt=\frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)dt=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{4}\sin 2t+C=$

$(x=a\sin t,\ dx=a\cos t dt)$

$$\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{a^2}{2}2\sin t\cos t+C=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{a^2x}{2a}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}+C=$$

$$\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C\,.$$

$$\int\sqrt{x^2+A}\,dx=\quad x\sqrt{x^2+A}-\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+A}}dx=x\sqrt{x^2+A}-\int\frac{x^2+A-A}{\sqrt{x^2+A}}dx=$$

$$\begin{pmatrix} u=\sqrt{x^2+A} & dv=dx \\ du=\dfrac{xdx}{\sqrt{x^2+A}} & v=x \end{pmatrix}$$

$$x\sqrt{x^2+A}-\int\sqrt{x^2+A}\,dx+\int\frac{A}{\sqrt{x^2+A}}dx\,.$$

Перенося искомый интеграл из правой части в левую часть, получим

$$\int\sqrt{x^2+A}\,dx=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+A}+\frac{A}{2}\ln|\,x+\sqrt{x^2+A}\,|+C$$

10. $\int\frac{xdx}{a^2\pm x^2}=\pm\frac{1}{2}\int\frac{d\left(a^2\pm x^2\right)}{a^2\pm x^2}=\pm\frac{1}{2}\ln\left|a^2\pm x^2\right|+C$

11. $\int tgxdx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int\frac{d\cos x}{\cos x}=-\ln|\cos x|+C$

$\int ctgxdx=\int\frac{d\sin x}{\sin x}=\ln|\sin x|+C$

12. $\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{2\left(1+t^2\right)}{\left(1+t^2\right)2t}dt=\ln|t|+C=\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+C$

$$\begin{pmatrix} t=tg\dfrac{x}{2},\quad \sin x=2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}=2\sqrt{\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{t^2}}}\sqrt{\dfrac{1}{1+t^2}}=\dfrac{2t}{1+t^2}, \\ \cos x=\cos^2\dfrac{x}{2}-\sin^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{1+t^2}-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{t^2}}=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \\ x=2arctgt,\quad dx=\dfrac{2}{1+t^2}dt \end{pmatrix}$$

13. $\int\frac{dx}{\cos x}=\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$ - вывести самостоятельно.

Эти соотношения представляют собой таблицу основных интегралов.

**Интегрирование выражений, содержащих квадратный трехчлен.**

Квадратный трехчлен $ax^2+bx+c$, выделяя полный квадрат, можно привести к виду

$$ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=a\left(y^2\pm\beta^2\right),$$

где $y=x+\dfrac{b}{2a}$, $\qquad \beta=\dfrac{\sqrt{\left|b^2-4ac\right|}}{|2a|}$.

Знак «+» выбирается, если $D=b^2-4ac<0$, знак «-» выбирается, если $D>0$. Если $D=0,\ \beta=0$.

1. $\displaystyle\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a}\int\frac{dy}{y^2\pm\beta^2}$.

Если $D>0$, то $\displaystyle\frac{1}{a}\int\frac{dy}{y^2-\beta^2}=\frac{1}{2a\beta}\ln\left|\frac{y-\beta}{y+\beta}\right|+C$.

Если $D<0$, то $\displaystyle\frac{1}{a}\int\frac{dy}{y^2+\beta^2}=\frac{1}{a\beta}arctg\frac{y}{\beta}+C$.

Если $D=0$, то $\displaystyle\frac{1}{a}\int\frac{dy}{y^2}=-\frac{1}{ay}+C$

2. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\int\frac{dy}{\sqrt{a\left(y^2\pm\beta^2\right)}}$.

Если $a<0, D\le 0$, то под корнем стоит отрицательное число, интеграл в функциях действительной переменной вычислить не удастся.

Если $a>0$, $D<0$, то $\displaystyle\int\frac{dy}{\sqrt{a\left(y^2+\beta^2\right)}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|y+\sqrt{y^2+\beta^2}\right|+C$.

Если $a>0$, $D>0$, то $\displaystyle\int\frac{dy}{\sqrt{a\left(y^2-\beta^2\right)}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|y+\sqrt{y^2-\beta^2}\right|+C$.

Если $a>0, D=0$, то $\displaystyle\int\frac{dy}{\sqrt{a}\,y}=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln|y|+C$.

Если $a<0, D>0$, то $\displaystyle\int\frac{dy}{\sqrt{a\left(y^2-\beta^2\right)}}=\frac{1}{\sqrt{-a}}\int\frac{dy}{\sqrt{\beta^2-y^2}}=\frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{y}{\beta}+C$.

3. $\displaystyle\int\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}dx=\frac{M}{2a}\int\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx+\left(N-\frac{Mb}{2a}\right)\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=$

$$\frac{M}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right|+\left(N-\frac{Mb}{2}\right)\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

Интеграл $\displaystyle\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$ вычислен в п.1.

4. $\displaystyle\int\frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=\frac{M}{2a}\int\frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx+\left(N-\frac{Mb}{2}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=$

$$\frac{M}{a}\sqrt{ax^2+bx+c}+\left(N-\frac{Mb}{2}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Интеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ вычислен в п.2.

Заметим, что интегралы 5 –10 таблицы интегралов также содержат приведенный квадратный трехчлен.

Примеры.

$$\int\frac{dx}{x^2+4x+3}=\int\frac{dx}{(x+2)^2-1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x+3}\right|+C$$

$$\int\frac{dx}{x^2+4x+5}=\int\frac{dx}{(x+2)^2+1}=arctg(x+2)+C$$

$$\int\frac{dx}{x^2+4x+4}=\int\frac{dx}{(x+2)^2}=-\frac{1}{x+2}+C$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+3}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2-1}}=\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+3}\right|+C$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{9-(x+2)^2}}=\arcsin\frac{x+2}{3}+C$$

$$\int\frac{3x^2+4x+10}{x^2+4x+5}dx=\int\frac{3x^2+12x+15}{x^2+4x+5}dx-\int\frac{8x+5}{x^2+4x+5}dx=$$

$$3x-4\int\frac{2x+4}{x^2+4x+5}dx+11\int\frac{dx}{(x+2)^2+1}=3x-4\ln\left|x^2+4x+5\right|+11arctg(x+2)+C$$

$$\int\frac{4x-1}{\sqrt{5-4x-x^2}}dx=-2\int\frac{-2x-4}{\sqrt{5-4x-x^2}}dx-9\int\frac{dx}{\sqrt{9-(x+2)^2}}=$$

$$-4\sqrt{5-4x-x^2}-9\arcsin\frac{x+2}{3}+C.$$

**Лекция 3. Интегрирование рациональных функций.**

*Рациональная функция – это отношение двух целых функций – многочленов (полиномов).*

Если порядок полинома – числителя ниже порядка полинома – знаменателя, то такая рациональная функция называется *рациональной дробью.*

**Лемма 1**. *Если рациональная функция не является рациональной дробью, то ее можно привести к сумме целой части – полинома и рациональной дроби.*

Доказательство основано на правиле деления многочленов с остатком, например, на алгоритме деления многочленов «уголком».

Пример. $\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2+1} = \begin{array}{l|l} \underline{x^4+x^2+1} & \underline{x^2+1} \\ \underline{x^4+x^2} & x^2 \\ \quad\quad 1 & \end{array}$.

Отсюда следует, что $\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2+1} = x^2 + \dfrac{1}{x^2+1}$.

Поэтому интегрирование рациональной функции сводится к интегрированию многочлена и интегрированию рациональной дроби.

Интеграл от многочлена равен по свойствам линейности интеграла сумме произведений интегралов от степенных функций на постоянные коэффициенты. Интеграл от степенной функции легко вычислить по таблице интегралов.

**Разложение рациональной дроби $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ на элементарные.**

Полином $Q(x)$– знаменатель рациональной дроби может иметь действительный корень $\alpha$ некоторой $k$- ой кратности. Тогда $Q(x) = (x-\alpha)^k Q_1(x)$, где многочлен $Q_1(x)$ уже не имеет корня $\alpha$. В этом случае из рациональной дроби можно выделить элементарную рациональную дробь вида $\dfrac{A_k}{(x-\alpha)^k}$.

**Лемма 2.** Пусть $\alpha$ - действительный корень $k$- ой кратности полинома $Q(x)$– знаменателя рациональной дроби. Тогда

$\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{A_k}{(x-\alpha)^k} + \dfrac{P_1(x)}{(x-\alpha)^{k-1} Q_1(x)}$, где многочлен $Q_1(x)$ уже не имеет корня $\alpha$.

Доказательство. Приведем дроби к общему знаменателю $Q(x)$ и приравняем числители полученных дробей.

$P(x) = Q_1(x)A_k + P_1(x)(x-\alpha)$. Тогда выражение $P(x) - Q_1(x)A_k$ должно делиться на $(x-\alpha)$, т.е. $P(\alpha) - Q_1(\alpha)A_k = 0$. Этого можно добиться, выбрав $A_k = \dfrac{P(\alpha)}{Q_1(\alpha)}$.

**Следствие 1.** В условиях леммы 2 рациональную дробь можно представить в виде

$\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{A_k}{(x-\alpha)^k} + \dfrac{A_{k-1}}{(x-\alpha)^{k-1}} + \ldots + \dfrac{A_1}{(x-\alpha)} + \dfrac{\tilde{P}(x)}{\tilde{Q}(x)}$, где $\tilde{Q}(x)$ не имеет корня $\alpha$.

Доказательство. Применим лемму 2 $k$ раз и получим указанное разложение.

Полином $Q(x)$– знаменатель рациональной дроби может иметь пару комплексно сопряженных корней $\beta \pm i\gamma$ $k$- ой кратности. Тогда

$$Q(x)=\left(x^2+px+q\right)^k Q_1(x)=\left(x-(\beta+i\gamma)\right)\left(x-(\beta-i\gamma)\right)^k Q_1(x)=\left(x^2-2\beta x+\beta^2+\gamma^2\right)^k Q_1(x)=$$
$$\left((x-\beta)^2+\gamma^2\right)^k Q_1(x)$$

Причем $\beta \pm i\gamma$ уже не являются корнями полинома $Q_1(x)$. В этом случае из рациональной дроби тоже можно выделить некоторую элементарную рациональную дробь вида $\dfrac{Mx+N}{\left((x-\beta)^2+\gamma^2\right)^k}$.

**Лемма 3.** Пусть $Q(x)$– знаменатель рациональной дроби $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ имеет пару комплексно сопряженных корней $\beta \pm i\gamma$ $k$ - ой кратности. Тогда рациональную дробь можно представить в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{Mx+N}{\left((x-\beta)^2+\gamma^2\right)^k}+\frac{P_1(x)}{\left((x-\beta)^2+\gamma^2\right)^{k-1}Q_1(x)},$$

где $\beta \pm i\gamma$ уже не являются корнями полинома $Q_1(x)$.

Доказательство. Приведем дроби к общему знаменателю и приравняем числители полученных дробей.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{(Mx+N)Q_1(x)+P_1(x)\left((x-\beta)^2+\gamma^2\right)}{Q(x)}.$$

$P(x)-(Mx+N)Q_1(x)$ должно делиться как на $\left(x-(\beta+i\gamma)\right)$, так и на $\left(x-(\beta-i\gamma)\right)$. Поэтому

$$P(\alpha)-(M\alpha+N)Q_1(\alpha)=0$$

$$P(\overline{\alpha})-(M\overline{\alpha}+N)Q_1(\overline{\alpha})=0,$$

где $\alpha=\beta+i\gamma$, $\overline{\alpha}=\beta-i\gamma$

Отсюда имеем систему уравнений для определения констант $M, N$

$$M\alpha+N=\frac{P(\alpha)}{Q_1(\alpha)}$$

$$M\overline{\alpha}+N=\frac{P(\overline{\alpha})}{Q_1(\overline{\alpha})}.$$

Определитель этой системы равен $\alpha-\overline{\alpha}\neq 0$, так как корни комплексные и $\beta \neq 0$. Поэтому система имеет единственное решение.

**Следствие 2.** В условиях леммы 2 рациональную дробь можно представить в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{M_k x+N_k}{\left(x^2+px+q\right)^k}+\frac{M_{k-1}x+N_{k-1}}{\left(x^2+px+q\right)^{k-1}}+\ldots+\frac{M_1 x+N_1}{\left(x^2+px+q\right)}+\frac{\tilde{P}(x)}{\tilde{Q}(x)},$$

где $\beta \pm i\gamma$ уже не являются корнями полинома $\tilde{Q}(x)$.

Доказательство. Применяем лемму 3 нужное число раз и получаем искомое разложение.

**Теорема.** Рациональная функция может быть представлена в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=M(x)+\frac{B}{(x-b)}+\ldots+\frac{A_k}{(x-\alpha)^k}+\frac{A_{k-1}}{(x-\alpha)^{k-1}}+\ldots+\frac{A_1}{(x-\alpha)}$$

$$+\ldots+\frac{M_k x+N_k}{\left(x^2+px+q\right)^k}+\frac{M_{k-1}x+N_{k-1}}{\left(x^2+px+q\right)^{k-1}}+\ldots+\frac{M_1 x+N_1}{\left(x^2+px+q\right)}+\ldots+\frac{Lx+D}{x^2+p_1x+q_1},$$

где $b$ - простой действительный корень $Q(x)$, $a$ - действительный корень $Q(x)$ кратности $k$, $\alpha,\overline{\alpha}$ - пара комплексно сопряженных корней кратности $k$ $Q(x)$ (комплексно сопряженные корни $x^2+px+q$), $\nu,\overline{\nu}$ - простая пара комплексно сопряженных корней $Q(x)$ (корни $x^2+p_1x+q_1$).

Доказательство. Применяем к рациональной функции лемму 1, выделяем полином – целую часть $M(x)$, затем по лемме 2, выделяем члены разложения, соответствующие простым и кратным действительным корням. Затем по лемме 3 выделяем члены разложения, соответствующие простым и кратным парам комплексно сопряженных корней. Так как многочлен может иметь корни лишь перечисленных типов, то разложение этим и исчерпывается.

**Следствие 3**. Задача интегрирования рациональной функции сводится к задачам интегрирования элементарных рациональных дробей четырех типов

1) $\frac{B}{x-\beta}$, 2) $\frac{A}{(x-\alpha)^k}$, 3) $\frac{Lx+D}{x^2+p_1x+q_1}$, 4) $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$.

**Способы вычисления коэффициентов при разложении рациональной дроби на элементарные.**

Пример. $$\frac{3x^5+x^4+7x^3+2x^2+2x+1}{\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Mx+N}{x^2+1}+\frac{Px+Q}{\left(x^2+1\right)^2}=$$

$$\frac{A(x+1)\left(x^2+1\right)^2+B(x-1)\left(x^2+1\right)^2+(Mx+N)\left(x^2+1\right)\left(x^2-1\right)+(Px+Q)\left(x^2-1\right)}{\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)^2}$$

Теперь надо приравнивать многочлены в числителях дробей и определять неизвестные коэффициенты A, B, M, N, P, Q.

Это можно сделать двумя способами.

*1 способ – приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях переменной, составлять и решать систему уравнений.*

$X^5|$ 3=A+B+M
$X^4|$ 1=A-B+N
$X^3|$ 7=2A+2B+P
$X^2|$ 2=2A-2B+Q  Решение системы A=2, B=1, M=N=Q=0, P=1.
X |2=A+B-N-P
1 |1=A-B-N-Q

*2 способ – задавать значения неизвестной, вычислять значения числителей и составлять систему уравнений.*

X=1 | 16=8A
X= -1| -8=-8B
X=0 | 1=A-B-N-P

X=2 | 181=75A-25B+30M+15N+6P+3Q
X=-2 | -96= -25A-75B-30M+15N-6P+3Q
X=-3 | -824= -200A –400B-240M –80N –24P+8Q

Решая эту систему уравнений, получим то же решение A=2, B=1, M=N=Q=0, P=1.

Какой способ применять – зависит от того, где получается более простая и удобная для решения система уравнений.

В данном примере вторая система сложнее первой.

**Интегрирование элементарных рациональных дробей четырех типов.**

1) $\int \frac{B}{x-\beta} dx = B \ln|x-\beta| + C$,

2) $\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = \frac{1}{1-k} \frac{1}{(x-a)^{k-1}}$, $k \neq 1$.

3) $\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c} dx = \frac{M}{2a}\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c} dx + \left(N - \frac{Mb}{2a}\right)\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} =$

$\frac{M}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right| + \left(N-\frac{Mb}{2}\right)\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ (пример рассмотрен во второй лекции). Для того, чтобы вычислить интеграл от дроби в п.3, достаточно в соответствующем примере второй лекции обозначить коэффициенты другими буквами.

4) $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} dx = \frac{M}{2}\int \frac{2x+p}{\left(x^2+px+q\right)^k} dx + \left(N - \frac{pM}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^k} =$

$\frac{M}{2(1-k)} \frac{1}{\left(x^2+px+q\right)^{k-1}} + \left(N-\frac{pM}{2}\right)J_k$, где $J_k = \int \frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^k}$.

Вычислим интеграл $J_k$.

$$J_k = \int \frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^k} .= \int \frac{dx}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right)^k} = \int \frac{dy}{\left(y^2+b^2\right)^k} =$$

$$\frac{1}{b^2}\int \frac{y^2+b^2-y^2}{\left(y^2+b^2\right)^k} dy = \frac{1}{b^2}\int \frac{dy}{\left(y^2+b^2\right)^{k-1}} - \frac{1}{2b^2}\int y \frac{2y}{\left(y^2+b^2\right)^k} dy =$$

$$\frac{1}{b^2}J_{k-1} - \frac{1}{2b^2}\int y\, d\left(\frac{1}{1-k}\ \frac{1}{\left(y^2+b^2\right)^{k-1}}\right) =$$

$$\frac{1}{b^2}\left(J_{k-1} - \frac{1}{2(1-k)}\frac{y}{\left(y^2+b^2\right)^{k-1}} + \frac{1}{2(1-k)}J_{k-1}\right) =$$

$$\frac{1}{b^2}\left(1+\frac{1}{2(1-k)}\right)J_{k-1} - \frac{y}{2b^2(1-k)\left(y^2+b^2\right)^{k-1}}$$

По этой рекуррентной формуле можно последовательно вычислять интегралы $J_k$ при различных $k$, предварительно вычислив

$$J_1 = \int \frac{dy}{y^2+b^2} = \frac{1}{b}\, arctg\, \frac{y}{b} + C\ .$$

Таким образом, показано, что все четыре типа элементарных рациональных дробей интегрируемы. Следовательно, **класс рациональных функций представляет собой класс интегрируемых функций.**

При интегрировании конкретных рациональных функций выделяют целую часть и раскладывают рациональную дробь на элементарные. Затем интегрируют элементарные рациональные дроби.

Пример.

$$\frac{2x^2+3x-1}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x+1)^2} = \frac{(A+B)x^2+(2B+C)x+(B-A-C)}{(x+1)^2(x-1)}$$

Составляем и решаем систему уравнений относительно неопределенных коэффициентов (первый способ определения коэффициентов)

$$\begin{cases} A+B=2 \\ 2B+C=3 \\ B-A-C=-1 \end{cases} \qquad \text{Получим } A=B=C=1$$

Можно воспользоваться и вторым способом определения коэффициентов.

X=0 | -1 = B-A-C

X=1 | 4 = A+B+2B+C+B-A-C= 4B

X=-1| -2 = A+B-2B-C+B-A-C= -2C. Отсюда C=1, B=1, A=1.

Вторая система проще, чем первая.

Теперь интегрируем сумму элементарных дробей.

$$\int \frac{2x^2+3x-1}{(x+1)^2(x-1)}dx = \ln|x+1| + \ln|x-1| - \frac{1}{x+1}$$

**Метод Остроградского.**

Если знаменатель рациональной дроби содержит пары комплексно сопряженных корней большой кратности, то удобно применять метод Остроградского. Он состоит в следующем: вычисляют $Q_1(x) = НОД(Q'(x), Q(x)),\quad Q(x) = Q_1(x)Q_2(x)$. Затем интеграл представляют в виде

$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{X(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{Y(x)}{Q_2(x)}dx$, где степень $X(x)$ на единицу меньше степени $Q_1(x)$, а степень $Y(x)$ на единицу меньше степени $Q_2(x)$. Коэффициенты полиномов $X(x)$, $Y(x)$ определяются при дифференцировании левой и правой частей и приравнивания коэффициентов при равных степенях x.

## Лекция 4. Интегрирование иррациональных и тригонометрических функций.

### Интегрирование рациональных функций от тригонометрических функций.

1. $\int R(\sin x, \cos x)dx$, где R( ) – рациональная функция своих аргументов.

Такие интегралы всегда можно взять **универсальной тригонометрической подстановкой** (лекция 1)

$$\left( \begin{array}{l} t = tg\frac{x}{2}, \quad \sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{t^2}}}\sqrt{\frac{1}{1+t^2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \\ \cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{1+\frac{1}{t^2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ x = 2arctgt, \quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt \end{array} \right)$$

2. $\int R(\sin x, \cos x)dx$.

А) Если $R(\sin x, \cos x)$ нечетна по sin x, то делают подстановку t = cos x.

Б) Если $R(\sin x, \cos x)$ нечетна по cos x, то делают подстановку t = sin x.

В) Если $R(\sin x, \cos x)$ не меняет знака при изменении знака sin x или cos x, то делают подстановку t = tg x.

$$t = tgx, \sin x = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}, \cos x = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}, x = arctgt, dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

Пример. $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}$. Здесь мы имеем случай В). Подстановкой $t = tgx$ этот интеграл сводится к интегралу

$$\int \frac{dt}{(1+t^2)\left(1+\frac{3}{1+t^2}\right)} = \int \frac{dt}{t^2+4} = \frac{1}{2}arctg\frac{t}{2} + C = \frac{1}{2}arctg\left(\frac{tgx}{2}\right) + C.$$

3. Интегралы $\int \sin mx \cos nx\, dx$, $\int \sin mx \sin nx\, dx$, $\int \cos mx \cos nx\, dx$

сводятся к табличным интегралам от синуса и косинуса, если преобразовать произведение тригонометрических функций в сумму по формулам

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x], \quad \sin mx \sin nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x],$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x], \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x).$$

Пример. $\int \sin 3x \sin 5x\, dx = \frac{1}{2}\int (\cos 2x - \cos 8x) dx = \sin 2x - \frac{1}{4}\sin 4x + C$

4. Интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$

a) Если m или n – нечетное положительное число, то sin x или cos x вносят под дифференциал.

Пример. $\int \sin^3 x \cos^2 x\, dx = -\int (1-\cos^2 x)\cos^2 x\, d\cos x = -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x + C$

b) Если m, n – четные положительные числа, то применяют формулы удвоения аргумента $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$.

Пример. $\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x\, dx = \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 4x}{2} dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C$

c) $\int tg^m x\, dx$, $\int ctg^m x\, dx$, где m – целое положительное число, берутся с использованием формул $tg^2 x = \sec^2 x - 1$, $ctg^2 x = \operatorname{cosec}^2 x - 1$.

Пример. $\int ctg^4 x\, dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)^2 dx = \int \frac{1}{\sin^4 x} dx - 2\int \frac{dx}{\sin^2 x} dx + x =$

$= - \int (1 + ctg^2 x)\, dctgx + 2ctgx + x = -ctgx - \frac{1}{3}ctg^3 x + 2ctgx + x + C$

d) В общем случае интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$ вычисляются по рекуррентным формулам с использованием основного тригонометрического тождества.

Пример. $\int \frac{dx}{\sin^3 x} = \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^3 x} dx = \int \frac{dx}{\sin x} + \int \cos x \frac{\cos x dx}{\sin^3 x} =$

$$\begin{pmatrix} u = \cos x & dv = \dfrac{\cos x}{\sin^3 x} dx \\ du = -\sin x\, dx & v = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sin^2 x} \end{pmatrix}$$

$= \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| - \frac{\cos x}{2\sin^2 x} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sin x} + C = \frac{1}{2}\left(\left|\ln tg\frac{x}{2}\right| - \frac{\cos x}{\sin^2 x}\right) + C$.

**Интегрирование иррациональных функций.**

Каких-либо общих методов интегрирования для всего класса иррациональных функций неизвестно, да и вряд ли такие методы можно придумать.

Общая идея состоит в том, чтобы придумать рационализирующую подстановку, т. е. найти такую замену переменных, чтобы в новых переменных интеграл был бы интегралом от рациональной функции. А, как показано на прошлой лекции, интегралы от рациональных функций всегда можно взять.

Ниже приводятся некоторые интегралы, для которых известны рационализирующие подстановки.

1. $\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}},\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p}{q}}\right)dx$, где R( ) – рациональная функция аргументов. Рационализирующая подстановка $z^n=\frac{ax+b}{cx+d}$, где $n=НОК(n,q)$.

Пример. $\int\frac{\sqrt[3]{x+1}}{1+\sqrt{x+1}}dx=6\int\frac{t^7}{1+t^3}dt$ - интеграл от рациональной функции, если взять $t=\sqrt[6]{x+1},\ t^6=x+1$.

2. $\int\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$. Этот интеграл можно представить в виде $\int\frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\quad Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, а затем искать коэффициенты полинома n-1 степени и константу, дифференцируя обе части, приводя дроби к общему знаменателю и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной.

Пример. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-x+1}}=(Ax+B)\sqrt{x^2-x+1}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}}$ .

Дифференцируем обе части

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2-x+1}}=A\sqrt{x^2-x+1}+\frac{(Ax+B)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{x^2-x+1}}+\lambda\frac{1}{\sqrt{x^2-x+1}}.$$

Приводим к общему знаменателю

$x^2=A(x^2-x+1)+(Ax+B)\left(x-\frac{1}{2}\right)+\lambda$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получаем $A=\frac{1}{2},B=\frac{3}{4},\lambda=-\frac{1}{8}$. Теперь, выделяя полный квадрат, получаем в правой части разложения «длинный логарифм»:

$$.\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-x+1}}=\left(\frac{x}{2}+\frac{3}{4}\right)\sqrt{x^2-x+1}-\frac{1}{8}\ln\left|\left(x-\frac{1}{2}\right)+\sqrt{x^2-x+1}\right|+C$$

3. В интегралах вида $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n \sqrt{ax^2+bx+c}}$ рационализирующая подстановка $z = \frac{1}{x-\alpha}$.

Пример. $\int \frac{dx}{x^5 \sqrt{x^2-1}}$. Применяем подстановку $t = \frac{1}{x},\ dx = -\frac{1}{t^2}dt$.

$\int \frac{dx}{x^5 \sqrt{x^2-1}} = -\int \frac{t^5 dt}{t^2 \sqrt{\frac{1}{t^2-1}}} = -\int \frac{t^4 dt}{\sqrt{1-t^2}}$. Это интеграл, рассмотренный выше в п.2.

4. *Дифференциальный бином.* $\int x^m \left(a+bx^n\right)^p dx$, где $m = \frac{m_1}{m_2},\ n = \frac{n_1}{n_2},\ p = \frac{p_1}{p_2}$ - рациональные числа. Такие интегралы берутся только в трех случаях (условия П.Л.Чебышева):

а) p – целое (подстановкой $t = \sqrt[\lambda]{x}$, где $\lambda = НОК(m_2, n_2)$),

б) $\frac{m+1}{n} = q$ - целое (подстановкой $t = \sqrt[p_2]{a+bx^n}$),

в) $p+q$ - целое (подстановкой $t = \sqrt[p_2]{\frac{a}{x^n}+b}$).

Пример. Показать, что в интеграле $\int \sqrt{x(a+bx)}dx$ $p+q$ - целое и равно 2. Показать, что подстановка $t = \sqrt{\frac{a}{x}+b}$ - рационализирующая.

5. Интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ сводятся к одному из трех типов интегралов:

а) $\int R\left(z, \sqrt{m^2-z^2}\right)dz$, для которого рационализирующие подстановки $z = m\sin t,\ z = m\, tht$,

б) $\int R\left(z, \sqrt{m^2+z^2}\right)dz$, с подстановками $z = m\, tg\, t,\ z = m\, sh\, t$,

в) $\int R\left(z, \sqrt{z^2-m^2}\right)dz$, с подстановками $z = \frac{m}{\cos t},\ z = m\, ch\, t$.

Упражнение. Вычислить интегралы $\int \sqrt{4-z^2}dz,\quad \int \sqrt{1+z^2}dz$.

**«Неберущиеся» интегралы.**

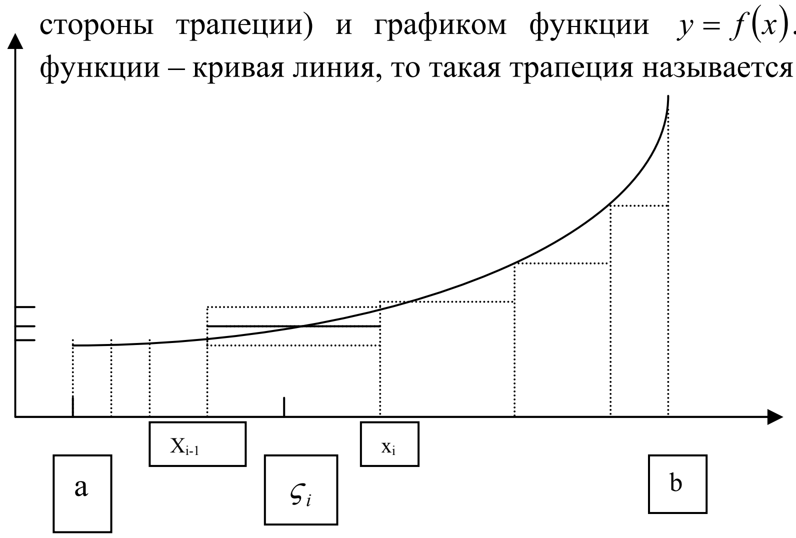
Это интегралы, которые не могут быть вычислены в элементарных функциях. Для таких интегралов приходится вводить специальные символы. Так получается потому, что класс интегралов от элементарных функций шире, чем класс элементарных функций (интегрирование – это переход от частного к общему – обобщение, а дифференцирование – это переход от общего к частному – уточнение).

Примеры. $Lix = \int \frac{\ln x}{x}dx, \quad Eix = \int \frac{e^x}{x}dx, \quad Six = \int \frac{\sin x}{x}dx, \quad Cix = \int \frac{\cos x}{x}dx$ и многие другие интегралы. Для них составляются специальные таблицы, которые можно найти в различных учебниках и справочниках.

### Лекция 5. Определенный интеграл.

**Задача о площади криволинейной трапеции**.

Рассмотрим криволинейную трапецию, образованную отрезком $[a,b]$ оси OX (основание трапеции), прямыми $x = a,\ x = b$ (на них лежат боковые стороны трапеции) и графиком функции $y = f(x)$. Так как график функции – кривая линия, то такая трапеция называется криволинейноqй.




Устроим разбиение отрезка $[a,b]$ точками $a = x_0,\ x_1,\ x_2,\ldots x_{i-1},\ x_i,\ldots x_n = b$. Обозначим $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. На каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ отметим точку $\varsigma_i$. Вычислим $f(\varsigma_i)$. Обозначим $\Delta S_i$ - площадь части криволинейной трапеции над отрезком $[x_{i-1}, x_i]$, S – площадь всей криволинейной трапеции. Тогда

$$f(x_{i-1})\Delta x_i < \Delta S_i \approx f(\varsigma_i)\Delta x_i < f(x_i)\Delta S_i, \quad \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x_i < S \approx \sum_{i=1}^{n} f(\varsigma_i)\Delta x_i < \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$. По второй теореме Вейерштрасса выполняется неравенство $m_i \le f(\varsigma_i) \le M_i$, где $m_i, M_i$- нижняя и верхняя грани функции на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$. Тогда

$$m_i\Delta x_i < \Delta S_i \approx f(\varsigma_i)\Delta x_i < M_i\Delta S_i, \quad \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i < S \approx \sum_{i=1}^{n} f(\varsigma_i)\Delta x_i < \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$$

Сумма $\sum_{i=1}^{n} f(\varsigma_i)\Delta x_i$ называется *интегральной суммой,* суммы $\underline{s} = \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i$ , $\overline{S} = \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$ называются соответственно нижней и верхней суммами Дарбу.

Будем измельчать разбиение так, чтобы $\max|\Delta x_i| \to 0$ . *Если существует предел интегральных сумм при неограниченном измельчении разбиения, то он* *называется определенным интегралом (по Риману) от функции* $f(x)$ *по отрезку* $[a,b]$ : $\lim_{\max|\Delta x_i|\to o}\sum_{i=1}^{n} f(\varsigma_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$.

Если существуют пределы нижней и верхней сумм Дарбу при неограниченном измельчении разбиения, то они называются нижним $I_*$ и верхним $I^*$ интегралами Дарбу.

**Критерий существования определенного интеграла**. Для того, чтобы существовал определенный интеграл по Риману $\int_a^b f(x)dx$, необходимо и достаточно, чтобы существовали и были равны нижний и верхний интегралы Дарбу.

**Следствие.** *Если определенный интеграл существует как предел интегральных сумм, то он не зависит*

- *от выбора разбиения, лишь бы* $[a,b]=\bigcup [x_{i-1},x_i],\ S([x_{j-1},x_j]\bigcap [x_{i-1},x_i])=0$.
- *от выбора отмеченных точек* $\varsigma_i$ *на элементах разбиения*
- *от способа измельчения разбиения, лишь бы* $\max|\Delta x_i|\to 0$.

Поэтому (*критерий Римана*) для интегрируемости по Риману ограниченной на отрезке функции необходимо и достаточно, чтобы существовало некоторое конкретное разбиение отрезка, на котором $|\overline{S}-\overline{s}|<\varepsilon$ для любого $\varepsilon>0$.

**Теорема**. Если функция непрерывна на отрезке, то она интегрируема на этом отрезке.

**Теорема.** Если функция кусочно непрерывна на отрезке (имеет на нем не более конечного числа разрывов первого рода), то она интегрируема на этом отрезке.

Мы пришли к определенному интегралу от задачи о площади криволинейной трапеции. Если функция принимает на отрезке неотрицательные значения, то *определенный интеграл можно интерпретировать как площадь под графиком функции.* В этом состоит **геометрический смысл определенного интеграла.**

К понятию интеграла можно придти и от других задач. Например, от задачи *о работе переменной по величине силы, не меняющей направления на прямолинейном пути,* от задачи *о массе отрезка, плотность которого меняется от точки к точке, от задачи о пути тела, движущегося прямолинейно с переменной скоростью.* Фактически, все эти задачи формально сводятся к задаче о площади криволинейной трапеции. В задаче о работе силы по оси ординат откладываются значения скалярного произведения вектора силы в данной точке x отрезка на орт оси OX. В задаче о массе отрезка по оси ординат откладываются значения переменной плотности. В задаче о пути, пройденном телом, по оси ординат откладывается величина скорости тела в данной точке.

К схеме определенного интеграла сводится любая задача вычисления некоторой величины, аддитивно зависящей от множества, т.е. величины I, удовлетворяющей соотношению $I(A\bigcup B)=I(A)+I(B)$, где A, B – отрезки оси OX (в общем случае определенного интеграла по некоторому множеству A, B – некоторые множества). В качестве таких величин можно выбрать длину отрезка, длину кривой, площадь поверхности, объем пространственного тела, массу указанных множеств и т.д.

**Свойства определенного интеграла.**

1. Свойства линейности

а) суперпозиции $\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$,

б) однородности $\int \lambda\, f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$

Вообще говоря, свойствами линейности обладают все линейные операции (дифференцирование, интегрирование, проектирование и т.д.)

2. Свойство аддитивности (по множеству)

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Доказательство. Пусть $c \in [a,b]$. Выберем разбиение так, чтобы точка с была границей элемента разбиения $(c = x_{k+1})$. Это возможно (следствие). Составим интегральную сумму $\sum_{i=1}^{n} f(\varsigma_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} f(\varsigma_i)\Delta x_i + \sum_{i=k+1}^{n} f(\varsigma_i)\Delta x_i$. Будем измельчать разбиение, сохраняя точку с границей элемента разбиения. Это возможно (следствие). Тогда предел при $\max|\Delta x_i| \to 0$ левой части равенства интегральных сумм равен $\int_a^b f(x)dx$, первого слагаемого правой части $\int_a^c f(x)dx$, второго слагаемого правой части $\int_c^b f(x)dx$.

3. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ (свойство «ориентируемости» множества).

Составляя интегральную сумму для интеграла в правой части равенства, заметим, что элемент разбиения надо проходить в другом направлении, от конца отрезка к началу. Поэтому для этого интеграла интегральная сумма будет $\sum_{i=1}^{n} f(\varsigma_i)(-\Delta x_i) =$ - $\sum_{i=1}^{n} f(\varsigma_i)\Delta x_i$. Переходя к пределу при измельчении разбиения, получим $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

4. $\int_a^a f(x)dx = 0$. Это постулируется, но, вообще говоря, это и очевидно.

5. $\int_a^b c\, dx = b - a$.

$$\int_a^b cdx = c\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}(\Delta x_1 + \Delta x_2 + ... + \Delta x_n) = c\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}(x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + ...x_n) =$$

$c(x_n - x_0) = c(b-a)$.

6. Если на отрезке $f(x) \geq 0$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$.

Так как $f(x) \geq 0$ на отрезке, то $\forall i\ f(\varsigma_i) \geq 0, \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} f(\varsigma_i)\Delta x_i \geq 0$. Переходя к пределу, получим $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$.

7. Если на отрезке $f(x) \geq g(x)$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \geq \int\limits_a^b g(x)dx$.

Так как $f(x) \geq g(x)$ на отрезке, то $\forall i\ f(\varsigma_i) \geq g(\varsigma_i), \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} f(\varsigma_i)\Delta x_i \geq \sum\limits_{i=1}^{n} g(\varsigma_i)\Delta x_i$. Переходя к пределу, получим $\int\limits_a^b f(x)dx \geq \int\limits_a^b g(x)dx$.

8. $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|dx$

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \Rightarrow -\int\limits_a^b |f(x)|dx \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b |f(x)|dx \Rightarrow \left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|dx.$$

9. $\int\limits_a^b f(z)dz = \int\limits_a^b f(x)dx$ (переменная интегрирования – «немая» переменная, ее можно изменить, она не несет в себе самостоятельного смысла)

Определенный интеграл является функцией своих пределов, при фиксированных пределах интегрирования это – число. Он определен своими пределами. Поэтому он и называется определенным.

**Теорема об оценке определенного интеграла.**

Пусть на отрезке $[a,b]$ $m \leq f(x) \leq M$ и функция $f(x)$ интегрируема на отрезке. Тогда

$$m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Доказательство. Интегрируя по свойству 7 неравенство $m \leq f(x) \leq M$, с учетом свойства 5 получаем требуемое утверждение.

Теорема об оценке полезна, когда интеграл вычислить трудно или вообще невозможно, но приблизительно оценить его необходимо. Это часто встречается в инженерной практике.

Пример. $\int\limits_{-2}^{2} e^{-x^2} dx$. Такой интеграл «не берется». Но $\frac{1}{e^4} \leq e^{-x^2} \leq 1$ на отрезке $[-2, 2]$. Поэтому, учитывая четность подинтегральной функции, получим $\frac{4}{e^4} \approx 0{,}16 \le \int\limits_{-2}^{2} e^{-x^2} dx \le 4$. Конечно, это – очень грубая оценка, более точную оценку можно получить, применяя методы численного интегрирования.

**Теорема о среднем значении определенного интеграла («теорема о среднем»).**

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда существует $c \in [a,b]$, что $f(c) = \frac{\int\limits_a^b f(x)dx}{b-a}$ (или $\int\limits_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$).

Геометрически, смысл этого соотношения состоит в том, что площадь криволинейной трапеции равна площади прямоугольника с тем же основанием и высотой $f(c)$.

Доказательство. По второй теореме Вейерштрасса функция, непрерывная на отрезке, достигает на нем своей верхней $M = \sup_{[a,b]} f(x)$ и нижней $m = \inf_{[a,b]} f(x)$ грани. По теореме об оценке $m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a)$, откуда, деля на $b-a$, получим

$m \le \frac{\int\limits_a^b f(x)dx}{b-a} \le M$. По второй теореме Больцано – Коши функция, непрерывная на отрезке, принимает на нем все промежуточные значения между m и M. В частности, существует и такая точка $c \in [a,b]$, в которой функция принимает свое промежуточное значение $\frac{\int\limits_a^b f(x)dx}{b-a}$, т.е. $f(c) = \frac{\int\limits_a^b f(x)dx}{b-a}$

## Лекция 6. Формула Ньютона – Лейбница.

### Интеграл с переменным верхним пределом.

Определенный интеграл представляет собой функцию пределов интегрирования. Это ясно даже из геометрической интерпретации интеграла как площади криволинейной трапеции. Изменяя пределы интегрирования, мы изменяем основание трапеции, изменяя тем самым ее площадь.

Рассмотрим интеграл как функцию верхнего предела интегрирования – **интеграл с переменным верхним пределом** $J(x) = \int\limits_a^x f(x)dx$. Переменная интегрирования по свойству 9 определенного интеграла – «немая переменная», ее можно заменить z или t или как- либо еще. Никакого отношения к верхнему пределу интегрирования она не имеет.

**Теорема о производной интеграла по переменному верхнему пределу** (основная теорема математического анализа)

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, пусть $x \in [a,b]$. Тогда $J'(x) = f(x)$.

Доказательство.

$$J'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{J(x+\Delta x) - J(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left( \int_a^{x+\Delta x} f(x)dx - \int_a^x f(x)dx \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(x)dx}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c)(x+\Delta x - x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(c) = f(x).$$

При доказательстве мы воспользовались теоремой о среднем $\left( \int_x^{x+\Delta x} f(x)dx = f(c)((x+\Delta x) - x),\ c \in (x,\ x+\Delta x) \right)$ и непрерывностью функции $\left(\lim_{\Delta x \to 0} f(c) = f(x)\right)$.

**Формула Ньютона – Лейбница.**

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, $F(x)$ - некоторая первообразная функции $f(x)$. Тогда $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Доказательство. Из теоремы о производной интеграла по переменному верхнему пределу следует, что $J'(x) = f(x)$, т.е. $J(x)$- первообразная для функции $f(x)$. По теоремам о первообразных две первообразных отличаются на константу т.е. $J(x) = F(x) + C$. Но $J(a) = 0$ (свойство 4 определенного интеграла), поэтому $F(a) + C = 0 \Rightarrow C = -F(a)$. Тогда $J(b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) + C = F(b) - F(a)$. Следовательно, $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Формула Ньютона – Лейбница - это одна из немногих формул - связок, связывающих различные разделы математики воедино. Если бы не было формулы Ньютона – Лейбница, то неопределенные интегралы не нашли бы приложения, а определенные интегралы нельзя было бы вычислить аналитически. Именно эта формула делает интегральное исчисление важнейшим инструментом исследования процессов. Любой процесс описывается дифференциальными или интегральными уравнениями, а они решаются в интегралах.

Мы встречались с такими формулами или теоремами – связками. Например, теорема о связи функции, ее предела и бесконечно малой связывает бесконечно малые и пределы. Теорема Ферма и ее следствия – теоремы о средних значениях связывают дифференциальное исчисление и теорию экстремума. В дальнейшем мы тоже будем встречаться с теоремами – связками, они всегда играют фундаментальную роль, например теоремы Остроградского – Гаусса и Стокса в векторном анализе.

**Методы вычисления определенного интеграла.**

Методы вычисления остаются теми же, что и методы вычисления неопределенного интеграла, но разница есть. В неопределенном интеграле, делая замену переменной, надо затем возвратиться к исходной функции, в определенном интеграле этого делать не нужно, при замене пересчитываются и пределы интегрирования для новой переменной. Определенный интеграл при постоянных пределах интегрирования – число и все равно, в каких переменных считать это число. Но требование взаимной однозначности функции – замены и в определенном интеграле сохраняется, просто оно маскируется условиями теоремы о замены переменной.

*Метод замены переменной.*

Пусть

1) $x=\varphi(t), \varphi'(t)$ непрерывны при $t\in[\alpha,\beta]$,

2) значения $x=\varphi(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$ не выходят за границы $[a,b]$,

3) $\varphi(\alpha)=a, \varphi(\beta)=b$,

Тогда $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

Доказательство.

$$\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))d\varphi(t) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b)-F(a) = \int\limits_a^b f(x)dx .$$

Пример $\int\limits_0^2 xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^4 e^t dt = \frac{1}{2}\left(e^4-1\right).$

$$\left(t=x^2, dt=2xdx\right)$$

Упражнение. Найдите ошибки в применении теоремы о замене переменной.

$$\pi = \int\limits_0^\pi dx = \int\limits_0^\pi \frac{1}{\sin^2 x+\cos^2 x}dx = \int\limits_0^\pi \frac{1}{1+tg^2x}\,\frac{dx}{\cos^2 x} = \int\limits_0^\pi \frac{d(tgx)}{1+tg^2x} = \, = \int\limits_0^0 \frac{dt}{1+t^2} = arctgt\,|_0^0 = 0$$

$$(t=tgx)$$

*Метод интегрирования по частям.*

Пусть функции $u(x), u'(x), v(x), v'(x)$ непрерывны на $[a,b]$. Тогда

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\,|_a^b - \int\limits_a^b v(x)u'(x)dx$$

Доказательство остается тем же, что для неопределенного интеграла, только интегрирование проводится в пределах от а до b.

**Интегрирование четных и нечетных функций на отрезке, симметричном относительно начала координат.**

$$\int\limits_{-a}^a f(x)dx = \int\limits_{-a}^0 f(x)dx + \int\limits_0^a f(x)dx = \, = -\int\limits_a^0 f(-t)dt + \int\limits_0^a f(x)dx = \int\limits_0^a f(-x)dx + \int\limits_0^a f(x)dx =$$

$$(t=-x,\ dx=-dt)$$

$$\int_a^b \left(f(-x)+f(x)\right)dx = \quad = \begin{cases} 2\int_a^b f(x)dx, & f(x) - \textit{четная} \\ 0, & f(x) - \textit{нечетная} \end{cases}$$ **, так как**

$$\left(f(-x)+f(x)\right) = \begin{cases} f(x)+f(x)=2f(x), & f(x)-\textit{четная} \\ -f(x)+f(x)=0, & f(x)-\textit{нечетная} \end{cases}.$$

**Интегрирование периодических функций на отрезке длины, кратной периоду.**

*Два свойства периодических функций.*

1) Если $f(x)$ - периодическая функция с периодом Т, то $f(\alpha x)$- периодическая функция с периодом $\frac{T}{\alpha}$.

Доказательство. $f\left(\alpha\left(x+\frac{T}{\alpha}\right)\right) = f(\alpha x+T) = f(\alpha x)$.

Поэтому период $\sin 2x$ равен $\pi$, период $\cos\frac{x}{4}$ равен $8\pi$ и т.д.

2) Если $f(x)$ - периодическая функция с периодом Т, то

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$$

Доказательство.

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^T f(x)dx + \int_T^{a+T} f(x)dx = \underset{(y=x-T)}{=} \int_a^T f(x)dx + \int_0^a f(y)dy = \underset{(x=y)}{=} \int_0^T f(x)dx$$

Поэтому интеграл от периодической функции на отрезке, длиной равной периоду, можно вычислять на любом таком отрезке, результат будет тем же самым.

Заметим, что $\int_0^{2\pi} \sin x\, dx = 0, \quad \int_0^{2\pi} \cos x\, dx = 0$. Поэтому, например, $\int_{-4\pi}^{2\pi} \sin x\, dx = 0, \quad \int_0^{\pi} \sin 4x\, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos 8x\, dx = 0$.

Когда встречаются интегралы от синусов и косинусов на отрезке длины, кратной периоду, то такие интегралы вычислять не стоит, они равны нулю.

**Лекции 7, 8 Несобственные интегралы.**

Мы строили определенный интеграл *по отрезку* $[a,b]$, *где* $a,b$ *- конечные числа, т.е. по конечному промежутку числовой оси.*

Кроме того, предполагалось, что подинтегральная *функция непрерывна на отрезке или имеет на нем конечное число точек разрыва первого рода.*

Если снимается хотя бы одно из этих условий, то понятие интеграла надо обобщать, вводя в прежней конструкции интеграла предельный переход и получая так называемые *несобственные интегралы.* Если снимается первое условие, то мы имеем несобственный интеграл первого рода, если снимается второе условие, то мы имеем несобственный интеграл второго рода.

**Несобственные интегралы от непрерывной функции по бесконечному промежутку (первого рода).**

Пусть отрезок $[a,b]$ числовой оси неограничен. Это возможно в трех случаях: $[-\infty,b]$, $[a,+\infty]$, $[-\infty,+\infty]$. Определим несобственные интегралы как пределы

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_{a}^{b} f(x)dx,$$

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{a}^{b} f(x)dx,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty,\\ b\to+\infty}} \int\limits_{a}^{b} f(x)dx.$$ В последнем интеграле a и b независимо друг от друга стремятся к $\pm\infty$. Если $|a|=|b|$, то предел в правой части последнего равенства называется главным значением несобственного интеграла.

Если эти пределы существуют и конечны, то несобственные интегралы называются *сходящимися.* Если предел не существует или бесконечен, то такой несобственный интеграл называется *расходящимся.*

*Если сходятся интегралы от функций* $f(x)$, $g(x)$, *то сходятся интегралы от функций* $\lambda\ f(x)$, $f(x)\pm g(x)$. Это следует из теорем о пределах.

Пример. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{1}^{b} \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to+\infty} -\frac{1}{x}\Big|_1^b = 1$, интеграл сходится.

Пример. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to+\infty} \ln x\Big|_1^{+\infty} = +\infty$, интеграл расходится.

Пример. $\int\limits_{0}^{+\infty} a^x dx$ сходится при $a<1$ и расходится при $a>1$. Проверьте это.

Рассмотрим *интеграл Дирихле* $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^n}dx$.

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^n}dx =_{(n\neq1)} \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{1-n}x^{1-n}\Big|_1^b = \frac{1}{1-n}\left(\lim_{b\to+\infty} b^{1-n} - 1\right) = \begin{cases} +\infty, & n<1 \\ \dfrac{1}{n-1}, & n>1 \end{cases}.$$

При $n=1$ $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^n}dx = \lim_{b\to+\infty}(\ln x - 1) = +\infty$, интеграл расходится.

Итак, *несобственный интеграл Дирихле первого рода* $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^n}dx$ *сходится при* $n>1$, *расходится при* $n\le1$.

**Признаки сравнения несобственных интегралов** (достаточные признаки сходимости и расходимости несобственных интегралов).

**1 признак. Теорема.** Пусть при $x > a$ выполнено неравенство $0 < f(x) \le g(x)$.

Если интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится.

Если интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то и интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ расходится.

Доказательство. Проинтегрируем неравенство $0 < f(x) \le g(x)$ на отрезке $[a,b]$, $b > a$,

$0 \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$. Так как обе функции на отрезке имеют только положительные значения, то интегралы от этих функций представляют собой возрастающие функции от верхнего предела b.

Если $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится ( $\int_a^{+\infty} g(x)dx =$ I), то при любом b > a $0 \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx \le \int_a^{+\infty} g(x)dx =$ I (I – конечное число).

Поэтому $\int_a^b f(x)dx$- монотонно возрастающая, ограниченная функция верхнего предела интегрирования b. Следовательно, по теореме Вейерштрасса этот интеграл как функция b имеет предел

$\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx = J \le I$, т.е. интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходится.*

Пусть теперь $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится. Если $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то по доказанному и $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, противоречие. Теорема доказана.

Вообще-то, все было ясно из геометрического смысла определенного интеграла как площади криволинейной трапеции под графиком функции. Если значения одной функции больше, чем значения другой функции, то и соответствующая криволинейная трапеция имеет большую площадь. И если эта площадь конечна, то и меньшая площадь конечна. А если меньшая площадь бесконечна, то и большая площадь бесконечна. Но строгое доказательство не подведет, а «очевидное» иногда подводит.

**2 признак сравнения. Теорема.** Пусть при x>a $f(x) > 0, g(x) > 0$. Если существует конечный предел $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K \ne 0$, то интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)dx$,

$\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$, сходятся или расходятся одновременно (если один сходится, то и другой сходится, если один расходится, то и другой расходится).

Доказательство. Из определения предела следует $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0: x>\delta \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)}-K\right|<\varepsilon \Rightarrow K-\varepsilon<\frac{f(x)}{g(x)}<K+\varepsilon \Rightarrow$

$(K-\varepsilon)g(x)<f(x)<(K+\varepsilon)g(x)$.

Если интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то по первому признаку сравнения сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} (K-\varepsilon)g(x)dx$, а, следовательно, сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$. Если интеграл $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} (K+\varepsilon)g(x)dx$, а, следовательно, по первому признаку сравнения сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$. Пусть интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится. Если интеграл $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то по первому признаку сравнения сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, противоречие. Пусть интеграл $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ расходится. Если интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то по первому признаку сравнения сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$, противоречие. Теорема доказана.

Эталонами служат обычно интегралы Дирихле или интегралы от показательной функции.

Пример. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1+\cos^3 x+x}{x^2(1+x)}dx$ сходится по второму признаку сравнения, интеграл сравнения $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$.

Пример. $\int\limits_2^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x-1}}dx$ сходится по первому признаку, интеграл сравнения $\int\limits_2^{+\infty} e^{-x}dx$.

**Несобственные интегралы от разрывной функции по конечному промежутку (второго рода).**

Функция может терпеть разрыв на левом конце отрезка $[a,b]$, на правом конце или в некоторой внутренней точке с отрезка.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ за исключением точки x= a, тогда несобственным интегралом второго рода от функции $f(x)$ по отрезку $[a,b]$ $\int\limits_a^b f(x)dx$ называется предел $\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx$

.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ за исключением точки x= b, тогда несобственным интегралом второго рода от функции $f(x)$ по отрезку $[a,b]$ $\int\limits_a^b f(x)dx$ называется предел $\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ за исключением точки x= $c \in (a,b)$, тогда несобственным интегралом второго рода от функции $f(x)$ по отрезку $[a,b]$ называется $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$ (интегралы в правой части определены выше).

Если указанные пределы существуют и конечны, то интегралы называются *сходящимися*, если предел бесконечен или не существует вообще, то интеграл *расходится.*

*Если сходятся интегралы от функций* $f(x)$, $g(x)$, *то сходятся интегралы от функций* $\lambda\ f(x)$, $f(x) \pm g(x)$. Это следует из теорем о пределах.

Пример. $\int\limits_{-1}^1 \frac{1}{x^2}dx = \int\limits_{-1}^0 \frac{1}{x^2}dx + \int\limits_0^1 \frac{1}{x^2}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x^2}dx + \lim_{\delta\to 0}\int\limits_{\delta}^1 \frac{1}{x^2}dx =$

$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{-\varepsilon}\right) + \lim_{\delta\to 0}\left(-\frac{1}{x}\Big|_{\delta}^{1}\right)$ Интеграл расходится, так как пределы в правой части равенства бесконечны.

Заметим, если здесь формально применить формулу Ньютона-Лейбница (она неприменима, т.к. функция разрывна), получим ответ 2. Еще раз убеждаемся, что теоремы следует применять, внимательно проверяя условия их применимости.

Рассмотрим *несобственный интеграл Дирихле второго рода* $\int\limits_0^b \frac{1}{x^n}dx$.

$$\int\limits_0^b \frac{1}{x^n}dx =_{(n\neq 1)} \lim_{\varepsilon\to +0} \frac{1}{1-n}x^{1-n}\Big|_{\varepsilon}^{b} = \frac{1}{1-n}\left(b^{1-n} - \lim_{\varepsilon\to +0}\varepsilon^{1-n}\right) = \begin{cases} -\infty, & n>1 \\ \dfrac{b^{1-n}}{1-n}, & n<1 \end{cases}.$$

При $n=1$ $\int\limits_0^b \frac{1}{x^n}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\varepsilon}^b \frac{1}{x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}(\ln b - \ln\varepsilon) = +\infty$, интеграл расходится.

Итак, *несобственный интеграл Дирихле второго рода* $\int\limits_0^b \frac{1}{x^n}dx$ *сходится при* $n<1$, *расходится при* $n \geq 1$.

*Замечание*. Интегралы Дирихле первого и второго рода расходятся при n=1. При n>1 интеграл Дирихле первого рода сходится, а интеграл Дирихле второго рода расходится. При n<1 интеграл Дирихле первого рода расходится, а интеграл Дирихле второго рода сходится.

Признаки сравнения интегралов остаются верными и для интегралов второго рода. Эталонами сравнения служат обычно интегралы Дирихле и интегралы от показательной функции.

Примеры. $\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt[5]{x}+\sqrt{x^2+1}+x^3}$ сходится сравнением с несобственным интегралом Дирихле $\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt[5]{x}}$ (n=$\frac{5}{2}>1$) по второму признаку сравнения. Вспомните, что сумма бесконечно малых функций в знаменателе эквивалентна при $x \to 0$ бесконечно малой наинизшего порядка малости. Можно доказать эквивалентность непосредственным вычислением предела.

$\int_1^{+\infty} \frac{x^2+(x+1)^3}{x+x^4}$ расходится сравнением с интегралом $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ по второму признаку сравнения.

**Абсолютная сходимость несобственных интегралов.**

До сих пор при анализе сходимости несобственных интегралов мы предполагали, что подинтегральная функция принимает только положительные значения. Откажемся от этого предположения. Будем исследовать сходимость несобственных интегралов *первого рода* вида $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, где $f(x)$ может принимать значения любого знака. Полученные результаты переносятся по аналогии на остальные несобственные интегралы первого и второго рода.

Интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} |\, f(x)\,|\, dx$.

*Теорема.* Если интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ абсолютно сходится, то он сходится.

Доказательство. Введем в рассмотрение две вспомогательные функции $\varphi(x)=\frac{1}{2}(|f(x)|+f(x)), \phi(x)=\frac{1}{2}(|f(x)|-f(x))$. Эти функции принимают только положительные значения. Кроме того, $\varphi(x)\le |f(x)|, \phi(x)\le |f(x)|$. По первому признаку сравнения из абсолютной сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, т.е. из сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} |\, f(x)\,|\, dx$ следует сходимость интегралов $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$,

$\int\limits_a^{+\infty} \phi(x)dx$. Тогда сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} (\varphi(x) - \phi(x))dx = \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$. Теорема доказана.

Пример. $\int\limits_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ абсолютно сходится, так как $|\cos x| \le 1$, а интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ сходится.

**Условная сходимость несобственных интегралов.**

Интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ называется *условно сходящимся,* если он сходится, а интеграл $\int\limits_a^{+\infty} | f(x) | dx$ расходится.

*Покажем, что интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ *условно сходится.*

$$\int\limits_a^b \frac{\sin x}{x} dx = -\int\limits_a^b \frac{d\cos x}{x} = -\left( \frac{\cos x}{x}\Big|_a^b + \int\limits_a^b \frac{\cos x}{x^2} dx \right) = -\frac{\cos b}{b} + \frac{\cos a}{a} - \int\limits_a^b \frac{\cos x}{x^2} dx$$

Перейдем к пределу при $b \to +\infty$. Интеграл в правой части равенства абсолютно сходится, обозначим его I.

$\int\limits_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\cos a}{a} - I$. Поэтому интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ сходится.

Покажем, что этот интеграл не сходится абсолютно. Справедливо неравенство $|\sin x| \ge \sin^2 x$. $\int\limits_a^b \frac{\sin^2 x}{x} dx = \int\limits_a^b \frac{1 - \cos 2x}{2x} dx = \int\limits_a^b \frac{1}{2x} dx - \int\limits_a^b \frac{\cos 2x}{2x} dx$.

Переходя к пределу при $b \to +\infty$, видим, что интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x} dx$ сходится (аналогично интегралу $\int\limits_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$), интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \frac{1}{2x} dx$ расходится. Поэтому интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$ расходится. Если бы он сходился, то складывая его с сходящимся интегралом $0.5 \int\limits_a^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx$, получили бы сходящийся интеграл ($0.5 \int\limits_a^{+\infty} \frac{1}{x} dx$), а этот интеграл расходится.

Используя неравенство $|\sin x| \ge \sin^2 x$ и расходимость интеграла $\int_a^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$, по первому признаку сравнения получаем расходимость интеграла $\int_a^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$. Следовательно, интеграл $\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ *условно сходится.*

**Лекции 9-10. Приложения определенного интеграла.**

Приложение интеграла к физическим задачам основано на свойстве аддитивности интеграла по множеству. Поэтому с помощью интеграла могут вычисляться такие величины, которые сами аддитивны по множеству. Например, площадь фигуры равна сумме площадей ее частей Длина дуги, площадь поверхности, объем тела, масса тела обладают тем же свойством. Поэтому все эти величины можно вычислять с помощью определенного интеграла.

Можно использовать два метода решения задач: *метод интегральных сумм и метод дифференциалов.*

Метод интегральных сумм повторяет конструкцию определенного интеграла: строится разбиение, отмечаются точки, в них вычисляется функция, вычисляется интегральная сумма, производится предельный переход. В этом методе основная трудность – доказать, что в пределе получится именно то, что нужно в задаче.

Метод дифференциалов использует неопределенный интеграл и формулу Ньютона – Лейбница. Вычисляют дифференциал величины, которую надо определить, а затем, интегрируя этот дифференциал, по формуле Ньютона – Лейбница получают требуемую величину. В этом методе основная трудность – доказать, что вычислен именно дифференциал нужной величины, а не что-либо иное.

**Вычисление площадей плоских фигур.**

1. *Фигура ограничена графиком функции, заданной в декартовой системе координат.*

Мы пришли к понятию определенного интеграла от задачи о площади криволинейной трапеции (фактически, используя метод интегральных сумм). Если функция $f(x)$ принимает только неотрицательные значения, то площадь $S(x)$под графиком функции на отрезке [a, b] может быть вычислена с помощью определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$. Заметим, что $dS(x) = f(x)dx$ поэтому здесь можно увидеть и метод дифференциалов.

Но функция может на некотором отрезке принимать и отрицательные значения, тогда интеграл по этому отрезку будет давать отрицательную площадь, что противоречит определению площади.

*Можно вычислять площадь по формуле* $S=\int_a^b |f(x)|dx$. Это равносильно изменению знака функции в тех областях, в которых она принимает отрицательные значения.

Если надо вычислить площадь фигуры, ограниченной сверху графиком функции $f(x)$, а снизу графиком функции $g(x)$, то *можно пользоваться формулой* $S=\int_a^b (f(x)-g(x))dx$, так как $f(x)\geq g(x)$.

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямыми x=0, x=2 и графиками функций $y=x^2$, $y=x^3$.

Заметим, что на интервале (0,1) выполнено неравенство $x^2 > x^3$, а при $x > 1$ выполнено неравенство $x^3 > x^2$. Поэтому

$$S=\int_0^1 \left(x^2-x^3\right)dx+\int_1^2 \left(x^3-x^2\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1+\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^2=$$

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+4-\frac{8}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{3}{2}$$

*2. Фигура ограничена графиком функции, заданной в полярной системе координат.*

Пусть график функции задан в полярной системе координат и мы хотим вычислить площадь криволинейного сектора, ограниченного двумя лучами $\varphi=\varphi_1$, $\varphi=\varphi_2$ и графиком функции $\rho=\rho(\varphi)$ в полярной системе координат.

Здесь можно использовать метод интегральных сумм, вычисляя площадь криволинейного сектора как предел суммы площадей элементарных секторов, в которых график функции заменен дугой окружности $S=\lim_{\max(\Delta\varphi_i)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\frac{\rho^2(\varsigma_i)}{2}\Delta\varphi_i$.

Можно использовать и метод дифференциалов: $\Delta S\approx dS=\frac{1}{2}\rho^2(\varphi)d\varphi,\quad S=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{\rho^2(\varphi)}{2}d\varphi$.

Рассуждать можно так. Заменяя элементарный криволинейный сектор, соответствующий центральному углу $d\varphi$ круговым сектором, имеем пропорцию $\begin{matrix}2\pi\Leftrightarrow\pi\rho^2\\ d\varphi\Leftrightarrow dS.\end{matrix}$ Отсюда $dS=\frac{\pi\rho^2 d\varphi}{2\pi}=\frac{\rho^2}{2}d\varphi$. Интегрируя и используя формулу Ньютона – Лейбница, получаем $S=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{\rho^2(\varphi)}{2}d\varphi$.

Пример. Вычислим площадь круга (проверим формулу). Полагаем $\rho\equiv R$. Площадь круга равна $\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}R^2 d\varphi=\frac{1}{2}R^2 2\pi=\pi R^2$.

Пример. Вычислим площадь, ограниченную кардиоидой $\rho=a(1+\cos\varphi)$.

$$S = 2\frac{1}{2}\int_0^{\pi} a^2(1+\cos\varphi)^2\,d\varphi = a^2\int_0^{\pi}\left(1+2\cos\varphi+\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi = a^2\,\frac{3}{2}\pi+0+0=\frac{3}{2}\pi a^2$$

*3 Фигура ограничена графиком функции, заданной параметрически.*

Функция может быть задана параметрически в виде $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$. Используем формулу $S=\int_a^b |f(x)|dx$, подставляя в нее $dx = |\dot{x}(t)|dt,\ |f(x)| = |y(t)|$ и пределы интегрирования по новой переменной $t$. $S = \int_{t_1}^{t_2} |y(t)\dot{x}(t)|dt$. Обычно при вычислении интеграла выделяют те области, где подинтегральная функция имеет определенный знак и учитывают соответствующую площадь с тем или иным знаком.

Пример. Вычислить площадь, ограниченную эллипсом $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$.

Используем симметрию эллипса, вычислим площадь четверти эллипса, находящуюся в первом квадранте. В этом квадранте $y \ge 0,\ \dot{x} = -a\sin t \le 0$. Поэтому $S = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} b\sin t\ a\sin t\ dt = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2t}{2}dt = 4ab\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = \pi ab$.

**Вычисление объемов тел.**

1. *Вычисление объемов тел по площадям параллельных сечений.*

Пусть требуется вычислить объем некоторого тела V по известным площадям сечений $S(x)$ этого тела плоскостями, перпендикулярными прямой OX, проведенными через любую точку x отрезка [a, b] прямой OX.

Применим метод дифференциалов. Считая элементарный объем $dV$, над отрезком $[x, x+dx]$ объемом прямого кругового цилиндра с площадью основания $S(x)$ и высотой $dx$, получим $\Delta V \approx dV = S(x)dx$. Интегрируя и применяя формулу Ньютона – Лейбница, получим

$$V = \int_a^b S(x)dx.$$

2. *Вычисление объемов тел вращения.*

Пусть требуется вычислить *объем тела вращения вокруг оси OX.*

Тогда $S(x) = \pi y^2(x),\quad V = \pi\int_a^b y^2(x)dx$.

Аналогично, *объем тела вращения вокруг оси OY*, если функция задана в виде $x = x(y)$, можно вычислить по формуле $V = \int_c^d x^2(y)dy$.

*Если функция задана в виде* $y = y(x)$ *и требуется определить объем тела вращения вокруг оси OY*, то формулу для вычисления объема можно получить следующим образом.

$$\Delta V(x) = V(x+dx) - V(x) = \pi y^2(x+dx) - \pi y^2(x) = \pi\left((y(x)+dy)^2 - y^2(x)\right) =$$
$$\pi\left(y^2(x) + 2y(x)dy + dy^2 - y^2(x)\right) = 2\pi xy(x)dx + \pi dy^2.$$

Переходя к дифференциалу и пренебрегая квадратичными членами, имеем $dV(x) = 2\pi y^2(x)dx$. Интегрируя и применяя формулу Ньютона – Лейбница, имеем $V = 2\pi\int\limits_a^b xydx$.

Пример. Вычислить объем шара $x^2 + y^2 = R^2$.
$$V = \int\limits_{-R}^{R} \pi y^2(x)dx = \pi\int\limits_{-R}^{R}\left(R^2 - x^2\right)dx = \pi R^2 2R - \pi\frac{x^3}{3}\Big|_{-R}^{R} = 2\pi R^3 - \frac{2\pi R^3}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Пример. Вычислить объем прямого кругового конуса, ограниченного поверхностью $\frac{x^2+y^2}{R^2} = \frac{z^2}{H^2}$ и плоскостью $z = H$.

Вычислим объем, как объем тела вращения, образованного вращением вокруг оси OZ прямоугольного треугольника в плоскости OXZ, катеты которого лежат на оси OZ и прямой z = H , а гипотенуза лежит на прямой $z = \frac{H}{R}x$.

Выражая x через z, получим $V = \pi\int\limits_0^H\left(\frac{Rz}{H}\right)^2 dz = \frac{\pi R^2}{H^2}\frac{z^3}{3}\Big|_0^H = \frac{\pi R^2 H}{3}$.

Искомый объем можно посчитать как разность объемов прямого кругового цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$ с высотой H и тела, вращения, ограниченного цилиндрической, конической поверхностями и плоскостью OXY

$$V = \pi R^2 H - 2\pi\int\limits_0^R xz(x)dx = \pi R^2 H - 2\pi\int\limits_0^R x\frac{Hx}{R}dx = \pi R^2 H - \frac{2\pi HR^3}{3R} = \frac{\pi R^2 H}{3}.$$

**Вычисление длины дуги.**

Для того, чтобы получить формулы для вычисления длины дуги, вспомним выведенные в 1 семестре формулы для дифференциала длины дуги.

*Если дуга представляет собой график непрерывно дифференцируемой функции* $y = f(x)$, дифференциал длины дуги можно вычислить по формуле

$dl = \sqrt{1 + y'^2(x)}dx$. Поэтому $l = \int\limits_a^b\sqrt{1 + y'^2(x)}dx.$

*Если гладкая дуга задана параметрически* $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, то

$dl = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}dt$. Поэтому $l = \int\limits_{t_1}^{t_2}\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}dt$.

*Если дуга задана в полярной системе координат*, то

$dl=\sqrt{\rho^2(\varphi)+\dot{\rho}^2(\varphi)}d\varphi$. Поэтому $l=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{\rho^2(\varphi)+\dot{\rho}^2(\varphi)}d\varphi$.

Пример. Вычислить длину дуги графика функции $y=\ln\sin x$, $x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$.

$\sqrt{1+y'^2(x)}=\sqrt{1+ctg^2x}=\frac{1}{\sin x}$. $\quad l=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin x}=\ln\left|tg\frac{\pi}{4}\right|-\ln\left|tg\frac{\pi}{8}\right|=-\ln\left|tg\frac{\pi}{8}\right|$.

Пример. Вычислить длину кардиоиды $\rho=a(1+\cos\varphi)$.

$$l=2a\int\limits_0^{\pi}\sqrt{1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}\;d\varphi=2\sqrt{2}a\int\limits_0^{\pi}\sqrt{1+\cos\varphi}\;d\varphi=$$

$$2\sqrt{2}a\int\limits_0^{\pi}\sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2}\;d\varphi=8a$$

Пример. Вычислить длину одной арки циклоиды. $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$.

$$\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}=a\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}=a\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}=2a\sin\frac{t}{2}$$

$$l=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}dt=2a\int\limits_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt=-4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=8a.$$

**Вычисление площади поверхности вращения.**

Пусть гладкая дуга представляет собой график непрерывно дифференцируемой функции $f(x)$, $x\in[a,b]$. Эта дуга вращается вокруг оси OX, описывая некоторую поверхность. Требуется определить площадь этой поверхности.

Считая элемент поверхности боковой поверхностью усеченного конуса, высотой которого является отрезок $[x,x+dx]$, получим $\Delta S\approx\pi(y(x)+y(x+dx))dl=2\pi y(x)dl+\pi y(x)dxdl$. Выделяя здесь линейную часть, пренебрегая квадратичным членом от дифференциала $dx$, получаем $dS=2\pi y(x)dl$. Интегрируя и применяя формулу Ньютона – Лейбница, получим

$$S=2\pi\int\limits_a^b y(x)dl=2\pi\int\limits_a^b y(x)\sqrt{1+y'^2(x)}dx.$$

Если функция задана параметрически или в полярной системе координат, то в этой формуле производится соответствующая замена переменной, формулы для дифференциала длины дуги $dl$ приведены выше.

Пример. Дуга графика функции $y=\frac{1}{x}$, $x\in[1,+\infty)$ вращается вокруг оси OX, образуя «ведерко». Можно ли налить в это ведерко определенное количество краски так, чтобы окрасить боковую поверхность ведерка?

Во-первых, определим, конечен ли объем ведерка.

$V=\pi\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx=\pi$, интеграл сходится, объем конечен. Ведерко будет окрашено, если будет окрашена каждая точка поверхности, т.е. в том случае, когда боковая поверхность ведерка будет конечна.

$S_{бок}=2\pi\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}dx$. Так как $\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\geq 0$, а интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx$ расходится, то по первому признаку сравнения будет расходиться и интеграл $S_{бок}=2\pi\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}dx$. Следовательно, боковая поверхность имеет бесконечную площадь, и боковую поверхность ведерка окрасить не удастся.

## Лекция 11. Дифференциальные уравнения.

*Дифференциальным уравнением называется уравнение относительно независимой переменной, неизвестной функции и ее производных.*

Дифференциальное уравнение *общего вида* выглядит следующим образом:

$F\left(x, y(x), y'(x),...y^n(x)\right)=0$. Здесь x – независимая переменная, y(x) – неизвестная функция.

*Порядком* дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, входящей в уравнение.

Если, пользуясь теоремой о неявной функции, из уравнения общего вида удается выразить явно старшую производную, то такое уравнение называется *уравнением, разрешенным относительно старшей производной.*

$y^n=f\left(x,y(x),y'(x)...y^{n-1}(x)\right)$.

### Дифференциальные уравнения первого порядка.

Дифференциальное уравнение первого порядка *общего вида* выглядит следующим образом:

$F\left(x,y(x),y'(x)\right)=0$.

Предположим, что дифференциальное уравнение удалось разрешить относительно производной: $y'(x)=f\left(x,y(x)\right)$ или

$y'=f(x, y)$.

Функция $y(x)$ называется **решением дифференциального уравнения первого порядка,** если при подстановке этого решения в уравнение получаем тождество.

$y'(x)\equiv f\left(x,y(x)\right)$.

Функция $y=\varphi(x,c)$ называется **общим решением дифференциального уравнения первого порядка в области** $G(x,y)$**,** если

- при любой постоянной $c$ функция $\varphi(x,c)$ является решением,
- для любого набора начальных условий $(x_0,y_0)\in G$ существует константа $c_0$ такая, что $y(x_0,c_0)=\varphi(x_0,c_0)=y_0$, т.е. существует решение из семейства $y=\varphi(x,c)$ (при $c=c_0$), удовлетворяющее этим начальным условиям.

*Одной из основных задач является задача отыскания общего решения дифференциального уравнения*

Если зафиксировать постоянную в общем решении, мы получим **частное решение дифференциального уравнения первого порядка.**

**Функция $\Phi(x,y)$ называется первым интегралом дифференциального уравнения, если она сохраняет свои значения на его решениях ($\Phi(x,y)$=C).**

По сути дела, это – закон сохранения (функция $\Phi(x,y)$ сохраняет значения на решениях дифференциального уравнения).

**Интегральной кривой** называется график решения дифференциального уравнения.

*Одной из основных задач является также* **задача Коши** - *задача отыскания частного решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям* $(x_0,y_0)\in G$ или интегральной кривой, проходящей через заданную точку $(x_0,y_0)\in G$.

**Теорема существования решения задачи Коши.**

*Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна в области $(x,y)\in G$, тогда существует хотя бы одно решение, удовлетворяющее любым заданным начальным условиям $(x_0,y_0)\in G$* или *существует хотя бы одна интегральная кривая, проходящая через точку $(x_0,y_0)\in G$.*

**Теорема существования и единственности решения задачи Коши.**

*Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна в области $(x,y)\in G$ и удовлетворяет в этой области одному из трех условий:*

*A: функция $f(x,y)$ удовлетворяет условию Липшица по $y$ :*

$$\left|f(x,y_1)-f(x,y_2)\right|\le L\left|y_1-y_2\right|,$$

*B: существует и ограничена частная производная $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$,*

*D: существует и непрерывна частная производная $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$.*

Заметим, что из условия D следует условие B., а из условия B следует условие A. Поэтому класс функций, удовлетворяющих условию A, шире, чем класс функций, удовлетворяющих условию B, а класс функций, удовлетворяющих условию B, шире, чем класс функций, удовлетворяющих условию C. Условие A проверить трудно, а условие B или условие D проверить гораздо легче.

Если в какой-либо точке $(x,y)\in G$ решение дифференциального уравнения не существует (через точку не проходит интегральная кривая), то в ней разрывна функция $f(x,y)$.

Если через какую-либо точку проходят две или более интегральных кривых, то функция $f(x,y)$ непрерывна в этой точке, но ни одно из условий A, B, D не выполнено в ней.

Пример. Найти общее и частное решение уравнения $y' = y$.

Очевидно, что общее решение будет $y = Ce^x$. Так как правая часть непрерывна и удовлетворяет условию D, то через любую точку конечной плоскости OXY проходит единственная интегральная кривая.

Для заданных начальных условий $(x_0, y_0) \in G$ существует константа $C_0 = y_0 e^{-x_0}$, такая что $y_0 = C_0 e^{x_0} = (y_0 e^{-x_0}) e^{x_0}$.

**Лекция 12. Основные типы дифференциальных уравнений первого порядка.**

**Уравнения с разделяющимися переменными.**

Уравнение с разделяющимися переменными имеет вид

$y' = f(x) g(y)$.

В этом уравнении переменные «можно разделить», т.е. функции от x и dx собрать в правую часть, а функции от y и dy – в левую часть. Затем интегрируем полученное соотношение и получаем соотношение вида $\varphi(y) = \phi(x) + C$.

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y), \quad \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx, \quad \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx, \quad \varphi(y) = \phi(x) + C.$$

Пример. $y' = y$, $\frac{dy}{y} = dx$. Заметим, что $y \equiv 0$ - решение, это так называемое тривиальное решение. Только, проанализировав, является ли $y \equiv 0$ решением или нет, мы имеем право, разделив обе части на $y$, двигаться дальше. Иначе тривиальное решение будет потеряно.

$\ln|y| = x + C_1$.

Здесь нельзя потерять модуль, иначе потеряем решения при $y < 0$.

$|y| = e^{C_1} e^x$.

Обозначим $C_2 = e^{C_1} > 0$ и раскроем модуль:

$y = \pm C_2 e^x$.

Заменим $C = \pm C_2$ и разрешим C быть равной нулю, т.к. тривиальное решение есть. Окончательно,

$y = Ce^x$, где C – произвольная действительная постоянная.

Обычно все эти «подводные камни» опускают (достаточно сказать о них один раз) и сразу выписывают решение уравнения $\frac{dy}{dx} = Ce^x$, $\forall C$.

Пример. Найти кривую, проходящую через точку $\left(1, \frac{1}{3}\right)$, если угловой коэффициент касательной к кривой в три раза больше углового коэффициента радиус-вектора в точке касания.

$y' = 3\frac{y}{x}$, $\frac{dy}{y} = 3\frac{dx}{x}$, $y \equiv 0$ - решение, $y = Cx^3$. Подставляя начальные условия, получим $\frac{1}{3} = C$, $y = \frac{1}{3}x^3$.

Пример. *Формула Циолковского*.

Ракета вместе с топливом, массой $m(t)$, движется прямолинейно, без учета гравитации. Скорость истечения топлива $V_0$, в начальный момент времени $t_0$ ракета неподвижна и имеет вместе с топливом массу М. Вывести формулы для скорости ракеты $v(t)$.

Выделим элемент массы dm. По закону сохранения количества движения

$$d(mv) = (v - V_0)dm, \quad mdv + vdm = vdm - V_0dm, \quad dv = -V_0\frac{dm}{m}, \quad v = -V_0 \ln m + C$$

Подставляя $v(t_0) = 0$, получим $C = V_0 \ln M$. Отсюда

$v = V_0 \ln\frac{M}{m}$ - формула Циолковского.

**Однородное уравнение.**

Правая часть однородного уравнения зависит от отношения $\frac{y}{x}$:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Это позволяет заменить отношение новой переменной $u(x) = \frac{y}{x}$ или $y = x\,u(x)$.

$$y' = u(x) + xu'(x) = f(u(x)), \; xu'(x) = f(u) - u, \quad \frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

Получено уравнение с разделяющимися переменными. Если $f(u) \equiv u$, то исходное уравнение уже является уравнением с разделяющимися переменными.

Пример. $y' = 1 + 2\frac{y}{x}$. $y = x\,u(x)$,

$$y' = xu' + u = 1 + 2u, \; \frac{du}{1+u} = \frac{dx}{x}, \quad \ln|1+u| = \ln|x| + C, \; 1 + u = Cx, \; 1 + \frac{y}{x} = Cx$$

$$y = (Cx - 1)x$$

**Обобщенно-однородное уравнение.**

Обобщенно-однородное уравнение имеет вид

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{qx + ky + m}\right).$$

Возможны два случая

1) $\begin{vmatrix} a & u \\ q & k \end{vmatrix} \neq 0$ Рекомендуется замена $\begin{cases} \phi = ax + by + c \\ t = qx + ky + m \end{cases}$,

$$d\phi = adx + bdy = \left(a + b\frac{dy}{dx}\right)dx$$

$$dt = qdx + kdy = \left(q + k\frac{dy}{dx}\right)dx$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{a + by'}{q + ky'} = \frac{a + bf\left(\frac{\phi}{t}\right)}{q + kf\left(\frac{\phi}{t}\right)}$$, получили однородное уравнение.

2) $\begin{vmatrix} a & u \\ q & k \end{vmatrix} = 0$

Здесь вводят новую функцию $\phi = ax + by + c$ старой переменной x.

$d\phi = adx + bdy$, $\frac{d\phi}{dx} = a + by' = a + bf\left(\frac{\phi}{\lambda\phi + \mu}\right)$, где $\lambda, \mu$ определяются из пропорциональности строк определителя. Получено уравнение с разделяющимися переменными.

Пример. $y' = \frac{y + x + 1}{y - x + 1}$, случай1).

$$\begin{matrix} \phi = y + x + 1 \\ t = y - x + 1 \end{matrix}, \quad \begin{matrix} d\phi = dy + dx = (y' + 1)dx \\ dt = dy - dx = (y' - 1)dx \end{matrix}, \quad \frac{d\phi}{dt} = \frac{y' + 1}{y' - 1} = \frac{\frac{\phi}{t} + 1}{\frac{\phi}{t} - 1} = \frac{\phi + t}{\phi - t}$$

Получили однородное уравнение.

Пример. $y' = \frac{y + x + 1}{y + x + 2}$, случай 2).

$$\phi = y + x, \quad d\phi = dy + dx, \quad \frac{d\phi}{dx} = \frac{dy}{dx} + 1 = \frac{\phi + 1}{\phi + 2} + 1.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными.

**Линейное уравнение.**

$$y' + a(x)y = b(x)$$

Существует два метода решения линейного уравнения: метод вариации произвольной постоянной и метод подстановки.

Метод вариации произвольной постоянной будет встречаться нам часто: при решении неоднородных линейных уравнений высшего порядка, при решении неоднородных систем линейных уравнений. Его надо знать твердо.

При решении **методом вариации произвольной постоянной** сначала решают однородное уравнение (с нулевой правой частью)

$y' + a(x)y = 0$

Это – уравнение с разделяющимися переменными.

$\frac{dy}{y} = -a(x)dx, \quad y = Ce^{-\int a(x)dx}$.

Затем варьируют произвольную постоянную, полагая $C = C(x)$.

$y' = C'(x)e^{-\int a(x)dx} - C(x)a(x)e^{-\int a(x)dx}$.

Подставляем в неоднородное уравнение:

$C'e^{-\int a(x)dx} - Ca(x)e^{-\int a(x)dx} + Ca(x)e^{-\int a(x)dx} = b(x)$.

При вариации произвольной постоянной здесь обязательно должны сократиться два члена, в этом идея метода.

$C' = b(x)e^{\int a(x)dx}, \quad C(x) = \int b(x)e^{\int a(x)dx}dx + C$, где C – произвольная постоянная.

$y(x) = e^{-\int a(x)dx}\left(\int b(x)e^{\int a(x)dx} + C\right) = Ce^{-\int a(x)dx} + e^{-\int a(x)dx}\int b(x)e^{\int a(x)dx}$.

Видно, что общее решение неоднородного уравнения равно сумме общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Это справедливо не только для линейных уравнений первого порядка, но и для линейных уравнений высших порядков, и для линейных систем. Там подобное утверждение называется теоремой о структуре общего решения неоднородного уравнения или системы.

Замечание. Решая уравнение методом вариации, *обязательно приводите его к виду* $y' + a(x)y = b(x)$ *(если при* $y'$ *стоит коэффициент, то делить на него обязательно*), иначе метод вариации даст ошибку.

При решении **методом подстановки** полагают

$y(x) = u(x)v(x)$. Мы видели выше, что решение действительно является произведением двух функций от x. Этот факт здесь и используется.

$y' = u'v + uv'$ . Подставляем в уравнение:

$u'v + uv' + a(x)uv = b(x)$.

Теперь решают либо уравнение $u'v + a(x)uv = 0$, определяя отсюда

$u = e^{-\int a(x)dx}$, либо уравнение $uv' + a(x)uv = 0$, определяя отсюда

$v = e^{-\int a(x)dx}$. *Здесь при интегрировании не надо добавлять константу, она появится позже, при отыскании второй функции.* В первом случае, остается найти v из $uv' = b(x), \quad v = \int \frac{b(x)}{u}dx = \int b(x)e^{\int a(x)dx}dx + C$.

Теперь $y = uv = e^{-\int a(x)dx}\left(\int b(x)e^{\int a(x)dx} + C\right)$, как и выше.

Во втором случае остается найти u из $u'v = b(x)$, $u = \int \frac{b(x)}{v} dx = \int b(x) e^{\int a(x)dx} dx + C$.

Теперь $y = uv = e^{-\int a(x)dx} \left( \int b(x) e^{\int a(x)dx} + C \right)$, как и выше.

Пример. $xy' - 2y = 2x^4$.

*Решение методом вариации*. Приводим уравнение, деля на коэффициент при $y'$:

$y' - 2\frac{y}{x} = 2x^3$ .

Решаем однородное уравнение $y' = 2\frac{y}{x}$, $\frac{dy}{y} = 2\frac{dx}{x}, y = Cx^2$ .

Варьируем произвольную постоянную $C = C(x)$, $y' = C'x^2 + 2Cx$ .

Подставляем в неоднородное уравнение $C'x^2 + 2Cx - 2Cx = 2x^3$,

$C' = 2x, \quad C(x) = x^2 + C_1, \quad y = x^2(x^2 + C_1)$.

*Решение методом подстановки.*

$y = uv, \quad y' = u'v + uv', \quad x(u'v + uv') - 2uv = 2x^4, \quad xuv' - 2uv = 0, \quad xv' = 2v$

$\frac{dv}{v} = 2\frac{dx}{x}, \quad v = x^2, \quad xu'v = 2x^4, \quad x^3 u' = 2x^4, \quad u' = 2x, \quad u = x^2 + C_1$

$y = uv = x^2(x^2 + C_1)$.

**Уравнение Бернулли.**

$y' + a(x)y = b(x)y^n$

Если n = 1, то это – уравнение с разделяющимися переменными, если n = 0, то это – линейное уравнение.

Заметим, что при n > 0 $y \equiv 0$ - решение уравнения.

*Решать уравнение Бернулли можно тремя способами*

1) *сведение к линейному уравнению заменой* $z = y^{1-n}$

Разделим обе части уравнения на $y^{n-1}$,

$$\frac{y'}{y^n} + a(x)\frac{1}{y^{n-1}} = b(x), \quad \frac{1}{1-n}\left(\frac{1}{y^{n-1}}\right)' + a(x)\frac{1}{y^{n-1}} = b(x), \quad \frac{1}{1-n}z' + a(x)z = b(x)$$

Получили линейное уравнение относительно $z(x)$ $(n \neq 1)$.

Этот метод применяется редко, так как уравнение Бернулли можно решать теми же методами, что и линейное уравнение, не приводя его предварительно к линейному.

2) *Решение методом вариации произвольной постоянной.*

Решение проводится аналогично линейному уравнению.

Решим сначала однородное уравнение, полагая правую часть уравнения нулевой.

$y' + a(x)y = 0, \quad y = Ce^{-\int a(x)dx}$.

Затем *ищем решение уравнения в виде* $y = C(x)e^{-\int a(x)dx}$, варьируя произвольную постоянную $C = C(x)$,

вычисляем $y'$ и подставляем в исходное уравнение .

$C'e^{-\int a(x)dx} - Ca(x)e^{-\int a(x)dx} + Ca(x)e^{-\int a(x)dx} = b(x)C^n e^{-n\int a(x)dx}$.

Вновь, как и в линейном уравнении, два слагаемых сокращаются, получаем уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{dC}{C^n} = b(x)e^{(1-n)\int a(x)dx}$$

Определяя отсюда функцию $C(x)$, подставляем ее в $y = C(x)e^{-\int a(x)dx}$.

3)*Решение методом подстановки.*

Полагаем $y = u(x)v(x)$, подставляем $y' = u'v + uv'$ в исходное уравнение

$u'v + uv' + a(x)uv = b(x)u^n v^n$.

Точно так же, как при решении линейного уравнения, решаем, например, уравнение $u'v + a(x)uv = 0, \quad u = e^{-\int a(x)dx}$. Подставляем полученную функцию, решаем «оставшееся» уравнение с разделяющимися переменными $uv' = b(x)u^n v^n, \quad \dfrac{dv}{v^n} = b(x)e^{(1-n)\int a(x)dx}$.

Заметим, что оно получилось точно таким же, как в методе вариации. Поэтому вторая функция в методе подстановки и есть та самая варьируемая постоянная. Затем записываем решение $y = u(x)v(x)$.

Видим, что метод вариации и метод подстановки, фактически, один и тот же метод. Просто в методе подстановки с самого начала используется то, что решение представляется в виде произведения двух функций независимой переменной.

Пример. $y' + xy = xy^2$

Решим это уравнение Бернулли методом вариации произвольной постоянной.

$$y' + xy = 0, \quad \frac{dy}{y} = -xdx, \quad \ln|y| = -\frac{1}{2}x^2 + C, \quad y = Ce^{-\frac{x^2}{2}}, \quad C = C(x),$$

$$y' = C'e^{-\frac{1}{2}x^2} - Cxe^{-\frac{1}{2}x^2}, \ C'e^{-\frac{1}{2}x^2} - Cxe^{-\frac{1}{2}x^2} + Cxe^{-\frac{1}{2}x^2} = xC^2e^{-x^2}$$

$$\frac{dC}{C^2} = xe^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad -\frac{1}{C} = -e^{-\frac{1}{2}x^2} - C_1, \quad C(x) = \frac{1}{C_1 + e^{-\frac{1}{2}x^2}},$$

**Уравнение в полных дифференциалах.**

Любое дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно старшей производной, можно записать в виде

$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ .

Если выполнено соотношение $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, то уравнение называется *уравнением в полных дифференциалах.*

Причину такого названия понять легко. Пусть $u(x,y)$- функция двух переменных, дифференцируемая и имеющая непрерывные вторые частные производные по своим переменным. Тогда $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$.

Если обозначить $P = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial u}{\partial y}$, то исходное уравнение можно записать в виде полного дифференциала

$du = P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ , а соотношение $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ как раз и означает равенство смешанных производных $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$.

Поэтому решить уравнение в полных дифференциалах – означает найти функцию $u(x,y)$ (она называется потенциалом). Так как $du = 0$ на решениях дифференциального уравнения, то потенциал будет первым интегралом исходного дифференциального уравнения:

$u(x,y) = C$

Для решения уравнения в полных дифференциалах можно использовать два способа.

1) $P = \frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow u(x,y) = \int P(x,y)dx + z_1(y) + C_1$ ,

$Q = \frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow u(x,y) = \int Q(x,y)dy + z_2(x) + C_2$.

Здесь интегрирование ведется «частным образом»: только по переменной x, считая y константой или только по y, считая x константой.

Сравнивая оба выражения для $u(x,y)$, находим функции $z_1(y), z_2(x)$ и константы.

Если какой-либо из интегралов, например, $\int P(x,y)dx$ не берется или его вычислить сложно, то можно найти $Q = \frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow u(x,y) = \int Q(x,y)dy + z_2(x) + C_2$.

Затем, дифференцируя $u(x,y)$ частным образом по x, надо сравнить $P(x,y)$ с $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$ и определить функции $z_1(y), z_2(x)$ и константы.

2) Потенциал можно определять по формуле (она будет выведена из независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования позже, в 3 семестре)

$$. u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy .$$

Пример. $(x+y)dx + (x+2y)dy = 0$.

Решим уравнение первым способом.

Так как $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial(x+y)}{\partial y} = 1 = \frac{\partial(x+2y)}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, то это – уравнение в полных дифференциалах.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P = x + y \Rightarrow u = \frac{1}{2}x^2 + xy + z_1(y) + C_1,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q = x + 2y \Rightarrow u = xy + y^2 + z_2(x) + C_2.$$

Сравнивая оба равенства, видим, что $z_1(y) = y^2$, $z_2(x) = \frac{1}{2}x^2$, $C_1 = C_2 = C$, поэтому $u(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + xy + y^2 + C$. Соотношение $\frac{1}{2}x^2 + xy + y^2 + C = 0$ - это первый интеграл заданного дифференциального уравнения.

Решим уравнение вторым способом.

$u(x,y) = \int\limits_0^x x dx + \int\limits_0^y (x+2y)dy = \frac{1}{2}x^2 + xy + y^2 + C$. Здесь принято $x_0 = y_0 = 0$.

**Интегрирующий множитель.**

Можно поставить вопрос, нельзя ли любое дифференциальное уравнение первого порядка свести к уравнению в полных дифференциалах?

Оказывается, что существует такой *интегрирующий множитель* $\mu(x,y)$, умножая на который обе части любого дифференциального уравнения, удовлетворяющего условиям теоремы Коши, можно привести это уравнение к уравнению в полных дифференциалах.

Однако неясно, как в общем случае найти этот интегрирующий множитель. Ясно только, что он должен удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial(\mu(x,y)P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu(x,y)Q)}{\partial x}.$$

Оказывается, если $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = F_1(x)$ (является функций только одной переменной x), то $\mu = \mu(x)$. Если $\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = F_2(y)$(является функций только одной переменной y), то $\mu = \mu(y)$.

Пример. $(x + y^2)dx - 2xydy = 0$.

Покажите, что здесь выполняется первое условие и $\mu(x) = \frac{1}{x^2}$.

Найдите потенциал, покажите, что он равен $u(x,y) = -\frac{y^2}{x} + \ln|x| + C$.

**Лекция 13. Геометрическая интерпретация дифференциальных**

**уравнений 1 порядка, изоклины. Особые точки и особые решения.**

Рассмотрим интегральные кривые дифференциального уравнения 1 порядка $y' = f(x, y)$. В любой точке плоскости OXY правая часть дифференциального уравнения известна, ее можно вычислить. Поэтому в любой точке плоскости известна и левая часть. Левая часть, исходя из геометрического смысла производной, задает тангенс угла наклона касательной к интегральной кривой.

Следовательно, в любой точке плоскости можно определить угол наклона (к оси OX) касательной к интегральной кривой, проходящей через эту точку, т.е. определить *направление вектора касательной к интегральной кривой*.

Если в некоторой области плоскости задана вектор-функция, то говорят, что она задает в этой области *векторное поле.*

Поэтому геометрический смысл дифференциального уравнения первого порядка состоит в том, что оно задает в области определения G (x, y) функции f(x, y) векторное поле *направлений векторов касательных к интегральным кривым*. Если интерпретировать дифференциальное уравнение механически, как скорость f(x, y) движения точки по траектории – интегральной кривой, то дифференциальное уравнение задает *поле скоростей*.

*Изоклинами* называются кривые в плоскости OXY, в каждой точке которой угол $\varphi$ наклона к оси OX касательной к интегральной кривой один и тот же $(tg\varphi = k)$. Уравнение изоклины: $f(x, y) = k$ .

Строя изоклины как можно чаще, можно достаточно точно построить интегральные кривые, нанося на каждой изоклине соответствующее ей направление вектора касательной к интегральной кривой..

*Пример.* $y' = -\frac{x}{y}$

Уравнение изоклины $-\frac{x}{y} = k$

| $k$ | $\varphi$ | Уравнение изоклины |
|---|---|---|
| 0 | 0 | x=0 (ось OY) |
| 1 | $\frac{\pi}{4}$ | y = - x |
| -1 | $-\frac{\pi}{4}$ | y = x |
| ∞ | $\frac{\pi}{2}$ | y = 0 (ось OX) |

Можно предположить, что уравнение интегральной кривой $x^2 + y^2 = R^2$ (это легко проверить: $2xdx + 2ydy = 0, \quad y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$).

Таким образом, интегральные кривые – окружности с центром в начале координат.

**Понятие об особых точках и особых решениях дифференциального уравнения первого порядка.**

Точка (x, y) называется *не особой точкой* дифференциального уравнения первого порядка $y' = f(x, y)$, если существует ее окрестность, что через каждую точку этой окрестности проходит единственная интегральная кривая.

Все прочие точки называются *особыми точками* дифференциального уравнения первого порядка $y' = f(x, y)$.

*Особым решением* называется решение, все точки (x, y) которого – особые.

*Пример.* $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$

Решая это уравнение с разделяющимися переменными, получим общее решение $y = (x - C)^3$ и решение, не принадлежащее этому семейству – тривиальное решение $y \equiv 0$.

Каждая точка оси OX – особая, так как через нее проходят как тривиальное решение, так и частное решение из семейства $y = (x - C)^3$.

$y \equiv 0$ - особое решение.

*Пример.* $y' = \sqrt{y}$

Заметим, что $y' = \sqrt{y} \geq 0$. Общее решение $y = \frac{1}{4}(x - C)^2, x \geq C$ (иначе $y' < 0$). Кроме того, $y \equiv 0$ - тоже решение. $y \equiv 0$ - особое решение.

Заметим, что на особом решении не выполняются условия теоремы Коши, гарантирующие единственность. В самом деле, в том и другом примерах $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ терпят разрыв при $y \equiv 0$.

**Уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной.**

Рассмотрим два типа уравнений 1) $y = f(x, y')$, 2) $x = f(y, y')$.

*Метод введения параметра.*

Обозначим $p = y', \quad dy = pdx.$

В случае 1) $y = f(x, p)$, $\quad p = \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx}, \quad \frac{dp}{dx} = \frac{p - \frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial p}}.$

Найдем решение $p = \varphi(x, C)$, подставим в $y = f(x, p)$,

получим $y = f(x, \varphi(x, C))$ - общее решение.

В случае 2) $x = f(y, p)$, $\quad \frac{1}{p} = \frac{dx}{dy} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dy}, \quad \frac{dp}{dy} = \frac{\frac{1}{p} - \frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial p}}.$

Найдем решение $p = \phi(y, C)$, подставим в $x = f(y, p)$,

получим $x = f(y, \phi(y, C))$ - общее решение.

*Уравнение Лагранжа.* $y = x\varphi(p) + \phi(p)$

Дифференцируем:

$$p = \varphi(p) + \left(x\varphi'(p) + \phi'(p)\right)\frac{dp}{dx}, \quad dp\left(x\varphi'(p) + \phi'(p)\right) = pdx - \varphi(p)dx,$$

$$\frac{dx}{dp} = \frac{1}{p - \varphi(p)}\left(x\varphi'(p) + \phi'(p)\right)$$ - линейное уравнение.

Отыскиваем $x = x(p)$и, подставляя в уравнение Лагранжа, находим $y = x(p)\varphi(p) + \phi(p)$.

*Пример.* $y + xy' = 4\sqrt{y'}$, $y + xp = 4\sqrt{p}$ - уравнение Лагранжа.

$$p + p + x\frac{dp}{dx} = \frac{2}{\sqrt{p}}\frac{dp}{dx}, \quad 2p = \frac{dp}{dx}\left(\frac{2}{\sqrt{p}} - x\right),$$

$$\frac{dx}{dp} = \frac{1}{p\sqrt{p}} - \frac{x}{2p}$$ - линейное уравнение по $x$.

Решаем его методом подстановки

$$x = uv, \quad u'v + uv' = \frac{uv}{2p} - \frac{1}{p\sqrt{p}}, \quad u = \frac{1}{\sqrt{p}}, v = \ln p + C,$$

$$x = uv = \frac{1}{\sqrt{p}}(\ln p + C), \quad y = \sqrt{p}(4 - \ln p - C)$$

*Уравнение Клеро.* $y = xp + \phi(p)$.

Уравнение Лагранжа превращается в уравнение Клеро, если в уравнении Лагранжа положить $\varphi(p) \equiv p$.

Дифференцируем обе части:

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + \frac{d\phi(p)}{dp}\frac{dp}{dx}, \quad \frac{dp}{dx}\left(x + \frac{d\phi(p)}{dp}\right) = 0.$$

1) $\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = C,\ y = Cx + \phi(C)$ - общее решение.

2) $x = -\frac{d\phi(p)}{dp} = -\phi'(p)$. Подставляя в уравнение, получим особое решение $\begin{cases} y = -p\phi'(p) + \phi(p) \\ x = -\phi'(p) \end{cases}$

*Пример.* $y = xy' - (y')^2$

$$p = p + xp' - 2pp', \quad p'(x - 2p) = 0.$$

1) $p' = 0 \Rightarrow p = C \Rightarrow y = xC - C^2$ - общее решение

2) $\begin{cases} x = 2p \\ y = xp - p^2 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{4}$ - особое решение.

**Лекция 14. Дифференциальные уравнения высших порядков.**

Дифференциальное уравнение n – ого порядка в общем виде записывается так:

$F\left(x, y, y',...y^{(n)}\right)=0$.

Дифференциальное уравнение n – ого порядка в виде, разрешенном относительно старшей производной, выглядит так:

$y^{(n)}=f\left(x, y, y'...y^{(n-1)}\right)$.

*Решением* дифференциального уравнения n – ого порядка называется функция $y(x)$, обращающая его в тождество.

*Общим решением* дифференциального уравнения n – ого порядка называется функция $y=\varphi\left(x, C_1,...C_n\right)$ такая, что

1) при любом наборе констант $C_1...C_n$ эта функция является решением,
2) для любого набора начальных условий из области существования решения $\left(x_0, y_0, y_0', ...y_0^{(n-1)}\right)\in G$ найдется набор констант $C_1...C_n$, при котором функция $y=\varphi\left(x, C_1,...C_n\right)$ удовлетворяет заданным начальным условиям, т.е. $y\left(x_0\right)=y_0$, $y'\left(x_0\right)=y_0'$, $...y^{(n)}\left(x_0\right)=y_0^{(n-1)}$.

Заметим, что общее решение дифференциального уравнения n – ого порядка *зависит ровно от n констант.*

*Частным решением* дифференциального уравнения n – ого порядка называется какое-либо из решений, входящих в общее решение (при конкретном выборе констант).

*Общим интегралом* дифференциального уравнения n – ого порядка называется функция $\Phi\left(x, y, C_1,...C_n\right)$, сохраняющая свои значения на решениях дифференциального уравнения.

*Интегральной кривой* называется график частного решения.

Общее решение представляет собой совокупность интегральных кривых.

Обычно рассматривается одна из трех задач:

1) *Найти общее решение* дифференциального уравнения n – ого порядка,
2) *Задача Коши* – найти частное решение дифференциального уравнения n – ого порядка, удовлетворяющее заданным начальным условиям,
3) *Краевая задача* – найти частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям, одна часть которых задана в точке $x_0$, а другая часть в точке $x_1$.

**Теорема Коши** *(существования и единственности решения задачи Коши для* дифференциального уравнения n – ого порядка $y^{(n)}=f\left(x, y, y'...y^{(n-1)}\right)$).

Пусть функция $f\left(x, y, y'...y^{(n-1)}\right)$ и ее частные производные по переменным $y, y', ...y^{(n-1)}$ определены и непрерывны в некоторой области $G\left(x, y, y', ...y^{(n-1)}\right)$.

Тогда для любой внутренней точки $\left(x_0, y_0, y_0', ...y_0^{(n-1)}\right)\in G$ существует единственное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее этим начальным условиям, т.е. $y\left(x_0\right)=y_0$, $y'\left(x_0\right)=y_0'$, $...y^{(n-1)}\left(x_0\right)=y_0^{(n-1)}$

(через любую внутреннюю точку $\left(x_0, y_0, y_0', ...y_0^{(n-1)}\right)\in G$ проходит единственная интегральная кривая).

Пример. Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка $y'' = f(x,y,y')$. Область существования и единственности решения $G \in R^3(x,y,y')$ заполнена непересекающимися интегральными кривыми. Через любую точку $(x_0, y_0, y_0') \in G$ проходит единственная интегральная кривая. Однако через «точку» $(x_0, y_0) \in R^2(x,y)$ проходит бесконечно много интегральных кривых, все они различаются значениями $y_0'$. Заметим, что в $R^3(x,y,y')$ «точка» $(x_0, y_0) \in R^2(x,y)$ представляет собой прямую $x = x_0$, $y = y_0$.

**Понижение порядка дифференциальных уравнений**.

Мы умеем аналитически решать всего пять типов дифференциальных уравнений первого порядка: с разделяющимися переменными, однородные, линейные, Бернулли, в полных дифференциалах. Причем однородные, линейные и Бернулли тоже сводятся к уравнениям с разделяющимися переменными.

Даже решить уравнение второго порядка, не говоря уж об уравнении n-го порядка – проблема. Поэтому стараются понизить порядок дифференциального уравнения, если это возможно, чтобы свести его к известным типам уравнений первого порядка.

Если правая часть дифференциального уравнения n-го порядка зависит только от x, то интегрируя его n раз, можно получить решение.

$$y^{(n)} = f(x), \quad y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_{n-1}, \quad y^{(n-2)} = \int\int f(x)dxdx + C_{n-1}x + C_{n-2,\ldots}$$

$$y(x) = \int\ldots\int f(x)dx\ldots dx + C_{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_{n-2}\frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + C_1x + C_0 .$$

Но это – очевидный случай. Рассмотрим менее очевидные случаи.

**Уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка.**

1) *Уравнение не содержит явно* $y$ , его вид $F(x,y', y'') = 0$ или $y'' = f(x,y')$.

Здесь применяется подстановка $y' = p(x), y'' = p'(x)$ - *вводится новая функция* $y' = p(x)$ *старой переменной.* Уравнение сводится к уравнению первого порядка $p' = f(x, p)$.

Пример. Найти общее решение уравнения $y''x\ln x = y'$ и его частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(e) = 0, y'(e) = 1$.

$$p'x\ln x = p, \quad \frac{dp}{p} = \frac{dx}{x\ln x}, \quad p = C_1\ln x, \quad y' = C_1\ln x, \quad y = C_1(x\ln x - x) + C_2$$

- общее решение. Найдем частное решение. $y'(e) = C_1\ln e = C_1 = 1, \quad y(e) = e\ln e - e + C_2 = e - e + C_2 = C_2 = 0$. Частное решение $y = x\ln x - x$.

2) *Уравнение не содержит явно* $x$ , его вид $F(y,y', y'') = 0$ или $y'' = f(y,y')$.

Здесь применяется подстановка $y' = p(y),\ y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p'(y)p(y)$ - *вводится новая функция* $y' = p(y)$ *новой переменной.* Уравнение сводится к уравнению первого порядка $pp' = f(y, p)$.

Пример. Найти общее решение уравнения $yy'' + (y')^2 = 0$ и его частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(1) = y'(1) = 1$.

$ypp' + p^2 = 0$

Либо $p \equiv 0 \Rightarrow y = C$ - *решение*, либо $yp' + p = 0,\ \ ydp = -pdy,\ \ p = \frac{C_1}{y}$,

$ydy = C_1 dx,\ \ \frac{y^2}{2} = C_1 x + C_2$ - общее решение.

Найдем частное решение.

$y'(1) = C_1 = 1,\ \ y(1) = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{2} = 1 + C_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow C_2 - \frac{1}{2}$,

$y^2 = 2x - 1$ - частное решение.

2) *Однородное уравнение относительно* $y, y', y''$.

Уравнение называется однородным относительно $y, y', y''$, если при замене $y \to ky,\ y' \to ky',\ y'' \to ky''$ уравнение не изменится.

Здесь применяется подстановка $y' = yz(x)$.

Пример. Найти общее решение уравнения $xyy'' - x(y')^2 = yy'$

$y' = yz,\ \ y'' = y'z + z'y = yz^2 + z'y,\ \ xy(yz^2 + yz') - xy^2z^2 = y^2 z$,

$xy^2 z' = y^2 z,\ \ y \equiv 0$ - *решение.* $xz' = z,\ \ \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x},\ \ z = C_1 x,\ \ y' = yC_1 x$,

$\frac{dy}{y} = C_1 x,\ \ y = C_2 e^{C_1 \frac{1}{2} x^2}$ - общее решение.

3) Уравнения, обе части которых являются полными производными каких-либо функций.

Пример. $yy'' = (y')^2$.

Запишем уравнение в виде $\frac{y''}{y'} = \frac{y'}{y},\ \ (\ln y')' = (\ln y)',\ \ \ln y' = \ln y + C$,

$y' = C_1 y,\ \ \frac{dy}{y} = C_1 dx,\ \ \ln y = C_1 x + C_2,\ \ y = C_3 e^{C_1 x}$.

Существуют еще несколько случаев, которые встречаются реже и здесь не рассматриваются.

## Лекции 15–16. Линейные дифференциальные уравнения n –ого порядка с переменными коэффициентами.

Линейное *однородное* дифференциальное уравнение n –ого порядка с переменными коэффициентами может быть записано в виде

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$$

Линейное *неоднородное* дифференциальное уравнение n –ого порядка с переменными коэффициентами может быть записано в виде

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x).$$

Если коэффициенты и правая часть – непрерывные функции и $a_0(x) \neq 0$, то условия теоремы Коши выполнены, *решения однородного и неоднородного уравнений существуют и единственны.*

Введем линейный дифференциальный оператор

$$L_n(p,x) = a_0(x)\frac{d^n}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + ... + a_{n-1}(x)\frac{d}{dx} + a_n(x) = a_0(x)p^n + ...a_{n-1}(x)p + a_n(x)$$

Здесь $p$ обозначает оператор дифференцирования $\frac{d}{dx}$.

Тогда *линейное однородное* уравнение можно записать в виде $L_n(p,x)y = 0$, а *линейное неоднородное – в виде* $L_n(p,x)y = f(x)$.

Так как $L_n(p,x)$ линеен, то

$$L_n(p,x)(y_1 + y_2) = L_n(p,x)y_1 + L_n(p,x)y_2, \quad L_n(p,x)(\lambda y) = \lambda L_n(p,x)y .$$

Пользуясь линейностью оператора, легко доказать *теоремы о свойствах решений однородного и неоднородного уравнений* (ниже обозначено $y_о$ - решение однородного уравнения, $y_н$ - решение неоднородного уравнения).

**Теоремы о свойствах решений**.

1) *сумма или разность решений однородного уравнения есть решение однородного уравнения,*
2) *разность решений неоднородного уравнения есть решение однородного уравнения,*
3) *сумма решений однородного и неоднородного уравнений есть решение неоднородного уравнения.*

Докажем эти теоремы.

1) $L(y_{о1} + y_{о2}) = Ly_{о1} + Ly_{о2} = 0$
2) $L(y_{н1} - y_{н2}) = Ly_{н1} - Ly_{н2} = f(x) - f(x) = 0$
3) $L(y_о + y_н) = Ly_о + Ly_н = 0 + f(x) = f(x)$.

**Теорема.** *Решения линейного однородного уравнения с переменными коэффициентами образуют линейное пространство.*

Доказательство. Так как сумма любых двух решений однородного уравнения и произведение любого решения на число вновь есть решения однородного уравнения, то операции сложения и умножения на число на множестве решений определены корректно (не выводят за множество решений).

Решения образуют аддитивную группу по сложению (абелев модуль). В самом деле, ассоциативность по сложению очевидна, $y \equiv 0$ (тривиальное решение) является решением однородного уравнения, для каждого решения

$y(x)$ противоположное решение $-y(x)$ тоже является решением. Следовательно, решения однородного уравнения – группа по сложению. Аддитивность решений очевидна, поэтому эта группа аддитивна. Справедливость четырех аксиом из восьми показана. Существует число «1», такое что $1 \cdot y(x)$- решение, справедлива ассоциативность по умножению на число $(\lambda(\mu y) = (\lambda\mu)y)$. Это – две аксиомы относительно операции умножения на число. Наконец, справедливы две аксиомы дистрибутивности, связывающие операции сложения и умножения на число $\lambda(y_1 + y_2) = \lambda y_1 + \lambda y_2, \quad (\lambda + \mu)y = \lambda y + \mu y$.

Итак, налицо полный набор из восьми аксиом. Продумайте их еще раз подробнее дома.

**Линейная зависимость и независимость.**

Функции $g_1(x), g_2(x), \ldots g_n(x)$ называются *линейно независимыми,* если $\lambda_1 g_1(x) + \ldots \lambda_n g_n(x) \equiv 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \ldots \lambda_n = 0$ (допустима только тривиальная линейная комбинация функций, тождественно равная нулю). В отличие от линейной независимости векторов здесь тождество линейной комбинации нулю, а не равенство. Это и понятно, так как равенство линейной комбинации нулю должно быть выполнено при любом значении аргумента.

Функции $g_1(x), g_2(x), \ldots g_n(x)$ называются *линейно зависимыми,* если существует не нулевой набор констант (не все константы равны нулю) $\lambda_1, \ldots \lambda_n$, такой что $\lambda_1 g_1(x) + \ldots \lambda_n g_n(x) \equiv 0$ $(\lambda_1{}^2 + \ldots \lambda_n{}^2 \neq 0)$ (существует нетривиальная линейная комбинация функций, тождественно равная нулю).

**Теорема.** *Для того чтобы функции были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы какая-либо из них линейно выражалась через остальные (представлялась в виде их линейной комбинации).*

Докажите эту теорему самостоятельно, она доказывается так же, как аналогичная ей теорема о линейной зависимости векторов.

**Определитель Вронского.**

Определитель Вронского для функций $y_1, y_2, \ldots y_n$ вводится как определитель, столбцами которого являются производные этих функций от нулевого (сами функции) до n-1 го порядка.

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' \cdots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

**Теорема**. *Если функции $y_1(x), y_2(x), \ldots y_n(x)$ линейно зависимы, то $W(x) \equiv 0$*

Доказательство. Так как функции $y_1(x), y_2(x), \ldots y_n(x)$ линейно зависимы, то какая-либо из них линейно выражается через остальные, например, $y_1(x) \equiv \lambda_2 y_2(x) + \ldots \lambda_n y_n(x)$. Тождество можно дифференцировать, поэтому

$y_1^{(k)}(x) \equiv \lambda_2 y_2^{(k)}(x) + ...\lambda_n y_n^{(k)}(x), \quad k = 1,2,3...(n-1)$. Тогда первый столбец определителя Вронского линейно выражается через остальные столбцы, поэтому определитель Вронского тождественно равен нулю.

**Теорема.** *Для того, чтобы решения линейного однородного дифференциального уравнения n-ого порядка были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы* $W(x) \equiv 0$.

Доказательство. Необходимость следует из предыдущей теоремы.

Достаточность. Зафиксируем некоторую точку $x_0$. Так как $W(x_0) = 0$, то столбцы определителя, вычисленные в этой точке, представляют собой линейно зависимые векторы.

$\exists k,\ C_1,...C_k \neq 0,...C_n$, что выполнены соотношения

$$C_1 y_1(x_0) + ... + C_k y_k(x_0) + ... + C_n y_n(x_0) = 0$$

$$C_1 y_1'(x_0) + ... + C_k y_k'(x_0) + ... + C_n y_n'(x_0) = 0$$

$$C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + ... + C_k y_k^{(n-1)}(x_0) + ... + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Так как линейная комбинация решений линейного однородного уравнения является его решением, то можно ввести решение вида

$y(x) \equiv C_1 y_1(x) + ... + C_k y_k(x) + ... + C_n y_n(x)$ - линейную комбинацию решений с теми же коэффициентами.

Заметим, что при $x = x_0$ это решение удовлетворяет нулевым начальным условиям, это следует из выписанной выше системы уравнений. Но тривиальное решение линейного однородного уравнения тоже удовлетворяет тем же нулевым начальным условиям. Поэтому из теоремы Коши следует, что введенное решение тождественно равно тривиальному, следовательно,

$$y(x) \equiv C_1 y_1(x) + ... + C_k y_k(x) + ... + C_n y_n(x) \equiv 0, \quad C_k \neq 0,$$

поэтому решения линейно зависимы.

**Следствие.** *Если определитель Вронского, построенный на решениях линейного однородного уравнения, обращается в нуль хотя бы в одной точке, то он тождественно равен нулю.*

Доказательство. Если $W(x_0) = 0$, то решения линейно зависимы, следовательно, $W(x) \equiv 0$.

**Теорема.** *1. Для линейной зависимости решений необходимо и достаточно* $W(x) \equiv 0$ (или $W(x_0) = 0$).

2. *Для линейной независимости решений необходимо и достаточно* $W(x_0) \neq 0$.

Доказательство. Первое утверждение следует из доказанной выше теоремы и следствия. Второе утверждение легко доказывается от противного.

Пусть решения линейно независимы. Если $W(x_0) = 0$, то решения линейно зависимы. Противоречие. Следовательно, $W(x_0) \neq 0 \ \forall x_0$.

Пусть $W(x_0) \neq 0$. Если решения линейно зависимы, то $W(x) \equiv 0$, следовательно, $W(x_0) = 0$, противоречие. Поэтому решения линейно независимы.

**Следствие.** *Обращение определителя Вронского в нуль хотя бы в одной точке является критерием линейной зависимости решений линейного однородного уравнения.*

*Отличие определителя Вронского от нуля является критерием линейной независимости решений линейного однородного уравнения.*

**Теорема.** *Размерность пространства решений линейного однородного уравнения n-ого порядка равна n.*

Доказательство.

1. Покажем, что существуют n линейно независимых решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка. Рассмотрим решения $y_1(x), y_2(x), \dots y_n(x)$, удовлетворяющие следующим начальным условиям:

$y_1(x_0) = 1,\ y_2(x_0) = 0, \dots y_n(x_0) = 0,$

$y_1'(x_0) = 0,\ y_2'(x_0) = 1, \dots y_n(x_0) = 0,$

..........................................................

$y_1^{(n-1)}(x_0) = 0,\ y_2^{(n-1)}(x_0) = 0, \dots y_n^{(n-1)}(x_0) = 1,$

Такие решения существуют. В самом деле, по теореме Коши через точку $x_0, y_{0,}\, y_0', y_0'', \dots y_n^{(n-1)}$ проходит единственная интегральная кривая – решение. Через точку $(x_0, 1, 0, 0, \dots 0)$ проходит решение $y_1(x)$, через точку $(x_0, 0, 1, 0, \dots 0)$ - решение $y_2(x)$, через точку $(x_0, 0, 0, 0, \dots 1)$ - решение $y_n(x)$.

Эти решения линейно независимы, так как $W(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0\dots & 0 \\ 0 & 1\dots & 0 \\ 0 & 0\dots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

2. Покажем, что любое решение линейного однородного уравнения линейно выражается через эти решения (является их линейной комбинацией).

Рассмотрим два решения. Одно - произвольное решение $y(x)$ с начальными условиями $\left( x_0, y_0, y_0', \dots y_0^{(n-1)} \right)$. Справедливо соотношение

$y(x_0) = C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \dots + C_n y_n(x_0)$

$y'(x_0) = C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \dots + C_n y_n'(x_0)$

.........................................................................

$y^{(n-1)}(x_0) = C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0)$, где

$C_1 = y_0, C_2 = y_0' \dots C_n = y_0^{(n-1)}$.

Второе решение – это линейная комбинация решений $y_1(x), \dots y_n(x)$ с теми же коэффициентами $\hat{y}(x) = C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x)$.

Вычисляя начальные условия в точке $x_0$ для решения $\hat{y}(x)$, убеждаемся, что они совпадают с начальными условиями для решения $y(x)$. Следовательно, по теореме Коши, произвольное решение $y(x)$

представляется в виде линейной комбинации линейно независимых решений $y_1(x),\dots y_n(x)$ $\left(y(x)\equiv \hat{y}(x)\right)$.

Таким, образом, существует n линейно независимых решений линейного однородного дифференциального уравнения n-ого порядка, и произвольное решение линейно выражается через эти решения . Поэтому размерность пространства решений линейного однородного дифференциального уравнения n-ого порядка равна n. $(\dim I = n)$ .

Любые n линейно независимых решений линейного однородного дифференциального уравнения n-ого порядка представляют собой *базис пространства решений* или **фундаментальную систему решений.**

**Теорема о структуре общего решения однородного уравнения.**

*Общее решение линейного однородного уравнения есть линейная комбинация решений фундаментальной системы.*

$$y_{oo}(x) = C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x).$$

Доказательство. Покажем, что линейная комбинация

$y_{oo}(x) = C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x)$ является общим решениям (удовлетворяет пунктам определения общего решения)

1. $y_{oo}(x)$ - решение линейного однородного уравнения как линейная комбинация решений.
2. Зададим произвольные начальные условия $y_0, y_0', \dots y_0^{(n-1)}$, покажем, что можно подобрать константы $C_1, \dots C_n$ такие, что $y_{oo}(x)$ удовлетворяет этим начальным условиям.

$$y_{oo}(x_0) = C_1 y_1(x_0) + \dots + C_n y_n(x_0) = y_0.$$

$$y_{oo}'(x_0) = C_1 y_1'(x_0) + \dots + C_n y_n'(x_0) = y_0'.$$

$$y_{oo}''(x_0) = C_1 y_1''(x_0) + \dots + C_n y_n''(x_0) = y_0''.$$

........................................................................

$$y_{oo}^{(n-1)}(x_0) = C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \dots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Это – система линейных алгебраических уравнений относительно констант $C_1, \dots C_n$. Определитель этой системы – определитель Вронского. Он не равен нулю, так как решения $y_1(x),\dots y_n(x)$ линейно независимы. Поэтому константы $C_1, \dots C_n$ определяются из этой системы по начальным условиям – правым частям системы единственным образом.

Следовательно, $y_{oo}(x) = C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x)$ - общее решение.

*Замечание.* Определитель Вронского (как всякий определитель) представляет собой ориентированный n – мерный объем, натянутый на векторы решений фундаментальной системы решений.

**Формула Остроградского – Лиувилля.**

Рассмотрим линейное однородное уравнение
$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0$.

Определитель Вронского можно вычислить по *формуле Остроградского – Лиувилля*

$$W(x)=Ce^{-\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}.$$

Вывод формулы Остроградского – Лиувилля.

Известна формула для производной определителя

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \ldots & a_{1n}(x)\\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \ldots & a_{2n}(x)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \ldots & a_{nn}(x)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11}' & a_{12}'\ldots & a_{1n}'\\ a_{21} & a_{22}\ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & a_{n2}\ldots & a_{nn}\end{vmatrix}+\ldots+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & a_{2n}\\ \ldots, & \ldots, & \ldots,\\ a_{n1}' & a_{n2}' & a_{nn}'\end{vmatrix}.$$

Вычислим $\dfrac{dW(x)}{dx}=\dfrac{d}{dx}\begin{vmatrix} y_1 & y_2\ldots & y_n\\ y_1' & y_2' & y_n'\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & y_n^{(n-1)}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y_1' & y_2'\ldots & y_n'\\ y_1' & y_2' & y_n'\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & y_n^{(n-1)}\end{vmatrix}+\ldots+$

$$+\begin{vmatrix} y_1 & y_2\ldots & y_n\\ y_1' & y_2'\ldots & y_n'\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)}\ldots & y_n^{(n)}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y_1 & \ldots & y_n\\ y_1' & \ldots & y_n'\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ -\frac{a_1}{a_0}y_1^{(n-1)}-\ldots-\frac{a_n}{a_0}y_1 & \ldots & -\frac{a_1}{a_0}y_n^{(n-1)}-\ldots-\frac{a_n}{a_0}y_n\end{vmatrix}=$$

$$0+\ldots+0+\begin{vmatrix} y_1 & \ldots & y_n\\ y_1' & \ldots & y_n'\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ -\frac{a_1}{a_0}y_1^{(n-1)} & \ldots & -\frac{a_1}{a_0}y_n^{(n-1)}\end{vmatrix}=-\frac{a_1}{a_0}W(x).$$

$$\frac{dW(x)}{W(x)}=-\frac{a_1(x)}{a_0(x)},\quad W(x)=Ce^{-\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}.$$

*Замечание*. В формуле Остроградского – Лиувилля участвуют только коэффициенты при двух старших производных.

**Рассмотрим частный случай уравнения второго порядка**.

$a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0$. Здесь формулу Остроградского – Лиувилля можно вывести проще. Рассмотрим $y_1(x), y_2(x)$ - два частных решения

$a_0(x)y_1''+a_1(x)y_1'+a_2(x)y_1=0$. , $a_0(x)y_2''+a_1(x)y_2'+a_2(x)y_2=0$. Умножим первое уравнение на $y_2$, а второе на $y_1$ и вычтем первое уравнение из второго.

$$a_0(x)\left(y_1y_2'' - y_2y_1''\right) + a_1(x)\left(y_1y_2' - y_2y_1'\right) = 0.$$

Так как $W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_2y_1'$, то $W'(x) = y_1'y_2' + y_1y_2'' - y_2'y_1' - y_2y_1''$ $= y_1y_2'' - y_2y_1''$.

Теперь уравнение можно переписать в виде $a_0(x)W'(x) + a_1(x)W(x) = 0$. Решая это уравнение с разделяющимися переменными, получаем формулу Остроградского – Лиувилля $W(x) = Ce^{-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}$

**Формула для построения второго частного решения по известному (построение фундаментальной системы).**

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_2y_1' = Ce^{-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}.$$

Разделим обе части уравнения на $y_1^2(x) \neq 0$

$$\frac{y_1y_2' - y_2y_1'}{y_1^2} = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = C\frac{1}{y_1^2}e^{-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}.$$

Отсюда $\frac{y_2}{y_1} = \int C\frac{1}{y_1^2}e^{-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}dx + C_1$. Нам надо найти частное решение, поэтому выберем C=1, C $_1$=0, получим $y_2 = y_1\int \frac{1}{y_1^2}e^{-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}dx$.

**Теорема о структуре общего решения неоднородного уравнения.**

*Общее решение линейного неоднородного уравнения есть сумма частного решения линейного неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения.*

$$y_{он}(x) = y_{чн}(x) + y_{оо}(x).$$

Доказательство. Покажем, что $y_{он}(x) = y_{чн}(x) + y_{оо}(x)$ - общее решение неоднородного уравнения.

1. $y_{он}(x) = y_{чн}(x) + y_{оо}(x)$ - решение неоднородного уравнения как сумма решений однородного и неоднородного уравнений (теоремы о свойствах решений).
2. Зададим произвольные начальные условия $x_0$, $y_0, y_0', \dots y_0^{(n-1)}$. Вычислим начальные условия для выбранного частного решения неоднородного уравнения $y_{чн}(x_0), y_{чн}'(x_0), \dots y_{чн}^{(m-1)}(x_0)$. Получим систему линейных алгебраических уравнений для определения констант:

$$y_{оо}(x_0) = C_1y_1(x_0) + \dots + C_ny_n(x_0) = y_0 - y_{чн}(x_0).$$

$$y_{oo}{}'(x_0)=C_1y_1{}'(x_0)+\ldots+C_ny_n{}'(x_0)=y_0{}'-y_{чн}{}'(x_0).$$
$$y_{oo}{}''(x_0)=C_1y_1{}''(x_0)+\ldots+C_ny_n{}''(x_0)=y_0{}''-y_{чн}{}''(x_0).$$
.......................................................................
$$y_{oo}{}^{(n-1)}(x_0)=C_1y_1{}^{(n-1)}(x_0)+\ldots+C_ny_n{}^{(n-1)}(x_0)=y_0{}^{(n-1)}-y_{чн}{}^{(n-1)}.$$

Определитель этой системы – определитель Вронского. Он не равен нулю, так как решения $y_1(x),\ldots y_n(x)$ линейно независимы. Поэтому константы $C_1,\ldots C_n$ определяются из этой системы по начальным условиям – правым частям системы единственным образом. Следовательно, $y_{он}(x)=y_{чн}(x)+y_{oo}(x)$ - общее решение неоднородного уравнения.

**Метод вариации произвольной постоянной** для линейного неоднородного дифференциального уравнения n-ого порядка. $y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x)$. ( $y^{(n)}=-Ly+f(x)$).

Здесь обозначено $L=a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y$, заметим, если $y$ - решение однородного уравнения, то $y^{(n)}=-Ly$.

Заметим, всегда, применяя метод вариации, надо делить на коэффициент при старшей производной, т.е. приводить уравнение.

Пусть найдено решение однородного уравнения
$$y_{oo}(x)=C_1y_1(x)+\ldots+C_ny_n(x).$$

Варьируем произвольные постоянные, ищем решение неоднородного уравнения в виде
$$y_{он}(x)=C_1(x)y_1(x)+\ldots+C_n(x)y_n(x).$$

Дифференцируем это соотношение
$$y_{он}{}'(x)=C_1{}'(x)y_1(x)+\ldots+C_n{}'(x)y_n(x)+C_1(x)y_1'(x)+\ldots+C_n(x)y_n'(x).$$

Потребуем, чтобы
$$C_1{}'(x)y_1(x)+\ldots+C_n{}'(x)y_n(x)=0.,$$

тогда $y_{он}{}'(x)=C_1(x)y_1'(x)+\ldots+C_n(x)y_n'(x)$.

Дифференцируем еще раз
$$y_{он}{}''(x)=C_1{}'(x)y_1'(x)+\ldots+C_n{}'(x)y_n'(x)+C_1y_1''(x)+\ldots C_ny_n''.$$

Потребуем, чтобы
$$C_1{}'(x)y_1{}'(x)+\ldots+C_n{}'(x)y_n{}'(x)=0.,$$

тогда $y_{он}{}''(x)=C_1(x)y_1''(x)+\ldots+C_n(x)y_n''(x)$.

Вновь дифференцируем и т.д., в результате, после n-2 дифференцирования получим
$$C_1{}'(x)y_1{}^{(n-2)}(x)+\ldots+C_n{}'(x)y_n{}^{(n-2)}(x)=0.$$
$$y_{он}{}^{(n-1)}(x)=C_1(x)y_1^{(n--1)}(x)+\ldots+C_n(x)y_n^{(n-1)}(x).$$

Дифференцируем и подставляем
$$y_{он}{}^{(n)}(x)=C_1y_1^{(n)}+\ldots+C_ny_n^{(n)}+C_1{}'(x)y_1{}^{(n-1)}(x)+\ldots+C_n{}'(x)y_n{}^{(n-1)}(x).$$

в неоднородное уравнение $\left(y^n\right) = -Ly + f(x)$.

$$C_1 y_1^{(n)} + \ldots + C_n y_n^{(n)} + C_1'(x) y_1^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n'(x) y_n^{(n-1)}(x) = -L(C_1 y_1 + \ldots C_n y_n) + f(x)$$

Так как $y_1, \ldots, y_n$ - решения однородного уравнения, то $y_k^{(n)} = -Ly_k = 0, k = 1, \ldots n$.

Получим $C_1' y_1^{(n-1)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-1)} = f(x)$.

Это – последнее уравнение системы для определения варьированных констант. Соберем все уравнения в *систему для определения констант*.

$C_1'(x) y_1(x) + \ldots + C_n'(x) y_n(x) = 0$.,

$C_1'(x) y_1'(x) + \ldots + C_n'(x) y_n'(x) = 0$.,

.....................................................

$C_1' y_1^{(n-1)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-1)} = f(x)$.

Так как определитель системы – определитель Вронского, не равный нулю в силу линейной независимости решений, то функции $C_1(x), \ldots C_n(x)$ определяются из этой системы однозначно.

Теперь общее решение неоднородного уравнения определяется по формуле $y_{он}(x) = C_1(x) y_1(x) + \ldots + C_n(x) y_n(x)$.

## Лекции 17-18. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

Начнем изучение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами с *однородных уравнений второго порядка*. Дело в том, что в приближенных инженерных расчетах, в инженерной практике, в исследовании процессов и систем все часто строится на анализе систем, моделями которых служат линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами первого и второго порядка. Вспомним, например, что вся механика строится на втором законе Ньютона, который можно записать в виде дифференциального уравнения второго порядка. Основные элементарные функции являются решениями уравнений первого и второго порядков. Экспонента является решением уравнения $\dot{x} = ax$, $\sin x, \cos x, shx, chx$ - решения уравнения $\ddot{x} \pm x = 0$.

Рассмотрим **линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами второго порядка**

$y'' + py' + qy = 0$.

Будем искать его решение в виде $y = e^{kx}$. Подставляя $y$ в дифференциальное уравнение, получим

$e^{kx}\left(k^2 + pk + q\right) = 0.$ Так как $e^{kx} \neq 0,$ то имеем

$k^2 + pk + q = 0$ - *характеристическое уравнение*. Решая его, получим корни

$$k_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\ .$$

Возможно три случая:

1) $k_1, k_2$ *действительны и различны,*

*2)* $k_1 = \alpha + i\beta,\ k_2 = \alpha - i\beta$ *- комплексно сопряженные корни,*

*3)* $k_1 = k_2$ *- действительный кратный корень.*

В случае *действительных, различных корней* получаем решения

$y_1 = e^{k_1 x},\ y_2 = e^{k_2 x}$.

Для того, чтобы доказать, что решения составляют фундаментальную систему решений и *общее решение записывается в виде*

$y_{oo} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$,

надо проверить линейную независимость $y_1, y_2$. Составим определитель Вронского

$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} \end{vmatrix} = e^{(k_1+k_2)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ k_1 & k_2 \end{vmatrix} = (k_1 - k_2) e^{(k_1+k_2)x} \neq 0$, так как

$k_1 \neq k_2$.

Заметим, что для уравнения второго порядка проверять линейную независимость можно проще. Надо показать, что $\dfrac{y_1}{y_2} \neq m - const$. Тогда столбцы определителя Вронского линейно независимы и $W \neq 0$. В нашем случае $k_1 = \alpha + i\beta,\ k_2 = \alpha - i\beta$ при $k_1 \neq k_2$.

В случае *комплексно сопряженных корней* $k_1 = \alpha + i\beta,\ k_2 = \alpha - i\beta$, применяя формулу Эйлера $e^{iz} = \cos z + i \sin z$, получим комплексно сопряженные решения $\hat{y}_1 = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$, $\hat{y}_2 = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)$. Так как линейная комбинация решений линейного однородного уравнения тоже является решением, то $y_1 = \dfrac{1}{2}(\hat{y}_1 + \hat{y}_2) = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2 = \dfrac{1}{2i}(y_1 - y_2) = e^{\alpha x}\sin\beta x$ являются решениями. Они линейно независимы, так как $\dfrac{y_1}{y_2} = ctg\beta x \neq 0$.

*Следовательно, общее решение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами в случае комплексных корней можно записать по формуле*

$y_{oo} = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$.

В случае *кратного действительного корня* $k_1 = k_2 = k$ одно из решений можно выбрать в форме $y_1 = e^{kx}$.

Второе решение будем выбирать в виде $y_2 = u(x)e^{kx}$. Подставим в дифференциальное уравнение, чтобы определить $u(x)$.

$y_2' = u'e^{kx} + kue^{kx} = e^{kx}(u' + ku)$,

$y_2'' = e^{kx}(u'' + ku' + ku' + k^2 u) = e^{kx}(u'' + 2ku' + k^2 u)$,

$e^{kx}(u'' + 2ku' + k^2 u + p(u' + ku) + qu) = e^{kx}(u'' + u'(p + 2k) + u(k^2 + pk + q)) = 0$

Так как $k$ - корень характеристического уравнения, то $k^2 + pk + q = 0$. Так как $k$ еще и кратный корень, то по теореме Виета $k_1 + k_2 = k + k = 2k = -p$. Поэтому $p + 2k = 0$. Для определения $u(x)$ имеем уравнение $u'' = 0$, отсюда $u(x) = ax + b$. Выберем $a = 1, b = 0$, получим $u(x) = x$.

Следовательно, $y_2 = u(x)e^{kx} = xe^{kx}$. Решения $y_1, y_2$ линейно независимы, так как $\dfrac{y_2}{y_1} = x \neq m$.

Поэтому *общее решение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами в случае кратного корня можно записать по формуле*

$$y_{oo} = e^{kx}(C_1 + C_2 x).$$

Примеры.

1) $y'' - y = 0, k^2 - 1 = 0, k_{1,2} = \pm 1, y_1 = e^x, y_2 = e^{-x}, \quad y_{oo} = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

2) $y'' - 5y' + 6y = 0, \quad k^2 - 5k + 6 = 0, k_1 = 2, k_2 = 3, \quad y_{oo} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$

3) $y'' + y = 0, \quad k^2 + 1 = 0, k_{1,2} = \pm i, y_1 = \cos x, y_2 = \sin x, \quad y_{oo} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

4) $y'' + 2y' + 5y = 0, \quad k^2 + 2k + 5 = 0, k_{1,2} = -1 \pm 2i, y_1 = e^{-x}\cos 2x, y_2 = e^{-x}\sin 2x,$

$y_{oo} = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$

5) $y'' + 2y' + y = 0, \quad k^2 + 2k + 1 = 0, k_{1,2} = -1, y_1 = e^{-x}, y_2 = xe^{-x},$

$y_{oo} = e^{-x}(C_1 + C_2 x).$

Рассмотрим теперь **линейное однородное дифференциальное уравнение $n$ - го порядка с постоянными коэффициентами.**

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0.$$

Будем искать его решение в виде $y = e^{kx}$. Дифференцируя и подставляя в дифференциальное уравнение, получим *характеристическое уравнение*

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1} k + a.$$

Каждому корню характеристического уравнения будет соответствовать определенное слагаемое в общем решении однородного уравнения. Если корень кратный кратности r, то такому корню будет соответствовать группа из r слагаемых в общем решении.

Если среди корней характеристического уравнения *есть простой действительный корень* $k_1$, то ему соответствует частное решение $y_1 = e^{k_1 x}$ в фундаментальной системе решений и слагаемое $C_1 e^{k_1 x}$ в $y_{oo}$.

*Если все корни характеристического уравнения* $k_1, \ldots k_n$ *действительны и различны*, то соответствующие им частные решения будут равны $y_1 = e^{k_1 x}, \ldots y_n = e^{k_n x}$. Покажем, что эти решения линейно независимы. Составим определитель Вронского

$$W(x)=\begin{vmatrix} e^{k_1x} & e^{k_2x} & \dots & e^{k_nx} \\ k_1e^{k_1x} & k_2e^{k_2x} & \dots & k_ne^{k_nx} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_1^{n-1}e^{k_1x} & k_2^{n-1}e^{k_2x} & \dots & k_n^{n-1}e^{k_nx} \end{vmatrix} = e^{(k_1+\ldots+k_n)x}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ k_1 & k_2 & .. & k_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \dots & k_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$e^{(k_1+\ldots k_n)x}\prod\nolimits_{1\le j<i\le n}\left(k_i-k_j\right)\neq 0$$

Полученный определитель известен в алгебре как определитель Вандермонда, он равен нулю только, когда какие-либо из корней совпадают.

Так как корни различны, то определитель Вронского не равен нулю, следовательно, решения $y_1=e^{k_1x},\ldots y_n=e^{k_nx}$ линейно независимы и составляют фундаментальную систему решений. Поэтому

$y_{oo}=C_1e^{k_1x}+\ldots+C_ne^{k_nx}$.

*Если среди корней имеется действительный корень $k$ кратности r, то ему соответствуют частные решения*

$y_1=e^{kx}$, $y_2=xe^{kx}$, $y_3=x^2e^{kx}$, ... $y_r=x^{r-1}e^{kx}$ и группа слагаемых в общем решении

$y_{oo}=\ldots e^{kx}\left(C_1+C_2x+C_3x^2+\ldots+C_rx^{r-1}\right)+\ldots$

*Если среди корней имеется простая пара комплексно сопряженных корней* $k_1=\alpha+i\beta,\ k_2=\alpha-i\beta$*, то им соответствуют частные решения в фундаментальной системе решений* $y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x,\quad y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x$ и группа слагаемых в общем решении

$y_{00}=\ldots e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)+\ldots$

*Если среди корней имеется пара комплексно сопряженных корней* $k_1=\alpha+i\beta,\ k_2=\alpha-i\beta$*, кратности r, то им соответствуют частные решения в фундаментальной системе решений* $y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x,\quad y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x$ $y_3=e^{\alpha x}x\cos\beta x,\quad y_4=e^{\alpha x}x\sin\beta x\ldots y_{2r-1}=e^{\alpha x}x^{r-1}\cos\beta x,\quad y_{2r}=e^{\alpha x}x^{r-1}\sin\beta x$ и группа слагаемых в общем решении

$y_{00}=..e^{\alpha x}[(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)+.x\left(C_3\cos\beta x+C_4\sin\beta x\right)+\ldots+x^{r-1}\left(C_{2r-1}\cos\beta x+C_{2r}\sin\beta x\right)]+\ldots$

Примеры.

$y^{(4)}-y=0,\quad k^4-1=(k-1)(k+1)(k-i)(k+i)=0,\ k_1=1,\ k_2=-1,\ k_3=i,\ k_4=-i,$

$y_1=e^x,\ y_2=e^{-x},\ y_3=\cos x,\ y_4=\sin x,\qquad y_{oo}=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x$

$y^{(6)}-y^{(4)}=0,\quad k^6-k^4=k^4(k-1)(k+1)=0,\quad k_{1,2,3,4}=0,\ k_5=1,k_6=-1$

$y_1=1,\ y_2=x,\ y_3=x^2,\ y_4=x^3,\ y_5=e^x,\ y_6=e^{-x}$,

$y_{oo}=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4x^3+C_5e^x+C_6e^{-x}$

**Линейное неоднородное дифференциальное уравнение n –го порядка с постоянными коэффициентами.**

$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x)$.

**Теорема о наложении частных решений.**

Пусть $y_1(x)$ - решение неоднородного уравнения с правой частью $f_1(x)$, $y_2(x)$ - решение неоднородного уравнения с правой частью $f_2(x)$. Тогда $y_1(x)+y_2(x)$ - решение неоднородного уравнения с правой частью $f_1(x)+f_2(x)$.

Доказательство. Подставим $y_1(x)+y_2(x)$ в неоднородное уравнение:

$$(y_1(x)+y_2(x))^{(n)}+a_1(x)(y_1(x)+y_2(x))^{(n-1)}+\ldots+a_n(x)(y_1(x)+y_2(x))=$$
$$(y_1(x))^{(n)}+a_1(x)(y_1(x))^{(n-1)}+\ldots+a_n(x)(y_1(x))+$$
$$(y_2(x))^{(n)}+a_1(x)(y_2(x))^{(n-1)}+\ldots+a_n(x)(y_2(x))=f_1(x)+f_2(x).$$

По теореме о структуре решения неоднородного уравнения $y_{он}(x)=y_{оо}(x)+y_{чн}(x)$. Общее решение однородного уравнения мы строить умеем. Остается подобрать частное решение неоднородного уравнения по известной правой части. При этом можно воспользоваться доказанной теоремой. Если правая часть представляет собой сумму функций, то можно искать частные решения, соответствующие каждому слагаемому суммы, а затем сложить найденные частные решения.

**Метод подбора формы частного решения.**

*Рассмотрим сначала уравнение второго порядка*

$$y''+py'+qy=f(x)$$

1) *Пусть правая часть представляет собой квазиполином* $f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}$.

Ищем частное решение в виде $y_ч(x)=Q(x)e^{\alpha x}$. Здесь $P_n(x)$ - полином n-ой степени, $Q(x)$- полином, степень которого надо определить.

$$y_ч'(x)=Q'(x)e^{\alpha x}+Q(x)\alpha e^{\alpha x},$$
$$y_ч''(x)=Q''(x)e^{\alpha x}+Q'(x)\alpha e^{\alpha x}+Q'(x)\alpha e^{\alpha x}+Q(x)\alpha^2 e^{\alpha x}.$$
$$y''+py'+qy=e^{\alpha x}\left(Q''(x)+(2\alpha+p)Q'+(\alpha^2+p\alpha+q)Q(x)\right)=e^{\alpha x}P_n(x)$$

а) Если $\alpha$ - не корень характеристического уравнения, то $\alpha^2+p\alpha+q\neq 0$, и многочлен $Q(x)$ надо выбирать той же степени, что и $P_n(x)$, т.е. степени n.

б) Если $\alpha$ - простой корень характеристического уравнения, то $\alpha^2+p\alpha+q=0,\quad 2\alpha+p\neq 0$. В этом случае многочлен $Q'(x)$ надо выбирать той же степени, что и $P_n(x)$, т.е. степени n. Тогда степень многочлена надо выбирать равной n+1. Однако при дифференцировании $Q(x)$ производная свободного члена (постоянной) равна нулю, *поэтому $Q(x)$ можно выбирать в виде $Q(x)=xQ_n(x)$.*

в) Если $\alpha$ - кратный корень характеристического уравнения, то $\alpha^2+p\alpha+q=0,\quad 2\alpha+p=0$. В этом случае многочлен $Q''(x)$ надо выбирать той же степени, что и $P_n(x)$, т.е. степени n. Тогда степень многочлена $Q(x)$ надо выбирать равной n+2. Однако при двукратном дифференцировании $Q(x)$

производная не только свободного члена равна нулю, но и производная линейного члена равна нулю. *Поэтому* $Q(x)$ *можно выбирать в виде* $Q(x)=x^2Q_n(x)$.

Пример. $y''-y=x+e^x$

$k^2-1=0$, $k_1=1, k_2=-1, \quad y_{oo}=C_1e^x+C_2e^{-x}$

$f_1(x)=x, \quad (P_n(x)=x, \alpha=0), \quad \alpha=0$ - не корень характеристического уравнения, поэтому частное решение надо искать в том же виде, что и правая часть, $y_1=Ax+B, \quad y_1'=A, \quad y_1''=0$. Подставляем в неоднородное уравнение с правой частью $f_1(x)=x$.

$-Ax-B=x\Rightarrow B=0, A+B=1$

$y_1(x)=-x$.

$f_2(x)=e^x, \quad (P_n(x)=1, \quad \alpha=1)$. Корень $\alpha=1$ содержится один раз среди корней характеристического уравнения, поэтому частное решение ищется в виде $y_2=Dxe^x, \quad y_2'=De^x(1+x), \quad y_2''=De^x(2+x)$.

Подставляем в неоднородное уравнение с правой частью $f_2(x)=e^x$.

$De^x(2+x-x)=e^x\Rightarrow D=\dfrac{1}{2}$

$y_2(x)=\dfrac{1}{2}xe^x$.

Суммируя оба частных решения, получаем частное решение неоднородного уравнения для исходной правой части:

$y_{чн}=-x+\dfrac{1}{2}xe^x$.

Общее решение неоднородного уравнения будет

$y_{он}=C_1e^x+C_2e^{-x}-x+\dfrac{1}{2}xe^x$.

2) Правая часть имеет вид $f(x)=e^{\alpha x}(M(x)\cos\beta x+N(x)\sin\beta x)$

а) *Если* $\alpha\pm i\beta$ *не корни характеристического уравнения,* то частное решение ищется в том виде, в котором задана правая часть:

$y_ч=e^{\alpha x}(U_m(x)\cos\beta x+V_m(x)\sin\beta x)$,

где $U_m(x),V_m(x)$ - полиномы степени m – максимальной из степеней полиномов $M(x),N(x)$.

б) Если $\alpha\pm i\beta$ - *пара корней характеристического уравнения*, то частное решение ищется в виде

$y_ч=xe^{\alpha x}(U_m(x)\cos\beta x+V_m(x)\sin\beta x)$,

Пример. $y''+y=\sin x$

$k^2+1=0, \quad k_{1,2}=\pm i, \quad y_{oo}=C_1\cos x+C_2\sin x$

$f(x)=\sin x, \quad (\alpha=0, \beta=1, M(x), N(x) \quad \textit{степени } 0)$

Пара корней $\alpha\pm i\beta=\pm i$ - пара корней характеристического уравнения.

$y_ч = x(A\cos x + B\sin x)$

$y_ч' = A\cos x + B\sin x - Ax\sin x + Bx\cos x,$

$y_ч'' = -2A\sin x + 2B\cos x - Ax\cos x - Bx\sin x$

Подставляем в неоднородное уравнение, получаем

$-2A\sin x + 2B\cos x = \sin x$, откуда $B = 0,\ A = -\dfrac{1}{2}$

$y_ч = -\dfrac{1}{2}x\cos x$, $y_{он} = C_1\cos x + C_2\sin x - \dfrac{1}{2}x\cos x$

Рассмотрим *неоднородное уравнение n-го порядка*, покажем, как в нем применять метод подбора формы частного решения.

Здесь ситуация сложнее, так как в характеристическом уравнении n корней, действительные корни и комплексно сопряженные, простые и кратные корни.

1) Пусть правая часть неоднородного уравнения имеет вид $f(x) = e^{\alpha x}P_n(x)$

a) Если $\alpha$ *не является корнем характеристического уравнения,* то частное решение неоднородного уравнения ищется в том же виде, что и правая часть $y_ч = e^{\alpha x}Q_n(x)$.

b) Если $\alpha$ - *корень характеристического уравнения r-ой кратно*сти, то частное решение неоднородного уравнения ищется в виде $y_ч = x^r e^{\alpha x}Q_n(x)$.

2) Пусть правая часть неоднородного уравнения имеет вид $f(x) = e^{\alpha x}(M(x)\cos\beta x + N(x)\sin\beta x)$

a) Если пара комплексно сопряженных корней *не является корнями характеристического уравнения,* то частное решение неоднородного уравнения ищется в том же виде, что и правая часть $y_ч = e^{\alpha x}(U_m\cos\beta x + V_m\sin\beta x)$, где степень m многочленов – максимальная из степеней многочленов $M(x), N(x)$.

b) Если пара комплексно сопряженных корней *является корнями характеристического уравнения r-ой кратности,* то частное решение неоднородного уравнения ищется в виде $y_ч = x^r e^{\alpha x}(U_m\cos\beta x + V_m\sin\beta x)$.

Пример. $y^{(5)} + y'' = x + \sin x$

$k^5 + k^2 = k^2(k+1)(k^2 - k + 1) = 0,\quad k_{1,2} = 0,\ k_3 = -1,\ k_{4,5} = \dfrac{1}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$y_{оо} = C_1 + C_2x + C_3e^{-x} + e^{\frac{x}{2}}\left(C_4\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + C_5\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)$.

$f_1(x) = x, (\alpha = 0,\ P_n(x) = x,\ n = 1)$. $\alpha = 0$ *содержится в корнях характеристического уравнения 2 раза,* поэтому $y_{ч1} = x^2(Ax + B)$. Подставляя это частное решение в неоднородное уравнение с правой частью $f_1(x)=x$, получим $6Ax+2B=x \Rightarrow A=\frac{1}{6},\ B=0, \quad y_{ч1}=\frac{1}{6}x^3.$

$f_2(x)=\sin x, \quad (\alpha=0, \beta=1, \quad \alpha \pm i\beta = \pm i)$. Корни $\pm i$ не содержатся в корнях характеристического уравнения, поэтому $y_{ч,2}=D\cos x+E\sin x$. Подставляя это частное решение в неоднородное уравнение с правой частью $f_2(x)=\sin x$, получим $(E-D)\cos x-(E+D)\sin x=\sin x, \Rightarrow E-D=0, E+D=1 \Rightarrow E=D=\frac{1}{2}$.

$y_{ч,2}=D\cos x+E\sin x$. $y_{ч,2}=\frac{1}{2}(\cos x+\sin x)$.

$y_ч=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}(\cos x+\sin x)$.

Пример. $y^{(5)}+y'''=x+\sin x$

$k^5+k^3=k^3(k+i)(k-i)=0, \Rightarrow k_{1,2,3}=0, k_{4,5}=\pm i$

$y_{оо}=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4\cos x+C_5\sin x$.

$f_1(x)=x, (\alpha=0, P_n(x)=x, n=1)$ $\alpha=0$ *содержится в корнях характеристического уравнения 3 раза,* поэтому $y_{ч1}=x^3(Ax+B)$.

$f_2(x)=\sin x, \quad (\alpha=0, \beta=1, \quad \alpha \pm i\beta=\pm i)$. Корни $\pm i$ (пара корней) содержатся в корнях характеристического уравнения один раз, поэтому $y_{ч,2}=x(D\cos x+E\sin x)$. Неопределенные коэффициенты определяются, как и выше, подстановкой в уравнение и сравнением коэффициентов при одинаковых степенях x, при sinx, cosx, xsinx, xcosx.

## Лекции 19-20. Нормальные системы дифференциальных уравнений.

Система дифференциальных уравнений – это система уравнений относительно независимой переменной x, функций этой переменной и их производных $y_1, y_1', y_1'' \dots y_1^{(m_1)} \dots y_n, y_n' \dots y_n^{(m_n)}$. Система может быть записана в *общем виде*

$F_1(x, y_1, y_1', y_1'' \dots y_1^{(m_1)} \dots y_n, y_n' \dots y_n^{(m_n)})=0$

..................................................................

$F_n(x, y_1, y_1', y_1'' \dots y_1^{(m_1)} \dots y_n, y_n' \dots y_n^{(m_n)})=0$

Порядок этой системы равен $m_1+\dots+m_n$.

Пользуясь теоремой о неявной функции, можно разрешить систему уравнений относительно старших производных и записать ее в *каноническом виде:*

$y_1^{(m_1)}=\varphi_1(x, y_1, y_1', y_1'' \dots y_1^{(m_1-1)} \dots y_n, y_n' \dots y_n^{(m_n-1)})$

..............................................................................

$y_n^{(m_n)}=\varphi_1(x, y_1, y_1', y_1'' \dots y_1^{(m_1-1)} \dots y_n, y_n' \dots y_n^{(m_n-1)})$

**Теорема.** Любое дифференциальное уравнение, разрешенное относительно старшей производной, можно свести к системе дифференциальных уравнений первого порядка.

Доказательство. Рассмотрим дифференциальное уравнение n-ого порядка $y^{(n)} = f\left(x, y, y' .. y^{(n-1)}\right)$. Обозначим $y_0(x) = y(x),\ y_0{}'(x) = y_1,\ y_1{}'(x) = y_2, .. y_{n-2}{}' = y_{n-1}$. Дифференциальное уравнение n-ого порядка удалось свести к системе n дифференциальных уравнений первого порядка

$$
\begin{aligned}
& y_0{}'(x) = y_1, \\
& y_1{}'(x) = y_2 \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& y_{n-2}{}' = y_{n-1} \\
& y_{n-1}{}' = f\left(x, y_0, y_1 \ldots y_{n-1}\right)
\end{aligned}
$$

Применяя эту теорему, можно от канонического вида системы дифференциальных уравнений перейти к системе дифференциальных уравнений первого порядка - *нормальному виду системы.*

$$
\begin{aligned}
& y_{10}(x) = y_1(x) \\
& \qquad y_{10}{}' = y_{11} \\
& \qquad y_{11}{}' = y_{12} \\
& \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \\
& \qquad y_{1,m_1-1}{}' = f_1\left(x, y_{10}, \ldots y_{1\,m_1-1}, \ldots . y_{n0}, \ldots y_{n\,m_n-1}\right) \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& y_{n\,0}(x) = y_n(x) \\
& \qquad y_{n\,0}{}' = y_{n\,1} \\
& \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \\
& \qquad y_{n\,m_n-1}{}' = f_n\left(x, y_{10}, \ldots y_{1\,m_1-1}, \ldots y_{n\,0}, \ldots y_{n\,m_n-1}\right)
\end{aligned}
$$

Получена система из $m_1 + \ldots m_n$ дифференциальных уравнений первого порядка.

Удобнее *нормальную систему дифференциальных уравнений* (систему в нормальной форме) записывать в виде:

$$
\begin{aligned}
& y_1{}' = f_1\left(x, y_1, \ldots y_n\right) \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\textit{покоординатная форма}) \\
& y_n{}' = f_n\left(x, y_1, \ldots y_n\right)
\end{aligned}
$$

или в виде

$$\vec{y}' = \vec{f}(x, \vec{y}), \text{ где } \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, \vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \end{pmatrix} \quad (\textit{векторная форма}).$$

*Пример.* $\begin{matrix} y_1'' = \sin y_1' \cos y_2' \\ y_2'' = xy_1 + y_2' \end{matrix}$ Эти уравнения сводятся к нормальной системе

$(y_{10} = y_1)$

$$y_{10}' = y_{11}$$

$$y_{11}' = \sin y_{11} \cos y_{21}$$

$(y_{20} = y_2)$

$$y_{20}' = y_{21}$$

$$y_{21}' = xy_{10} + y_{21}$$

Оказывается, не только дифференциальное уравнение n- ого порядка сводится к системе n дифференциальных уравнений первого порядка – нормальной системе, но и нормальная система может быть сведена к одному дифференциальному уравнению.

**Теорема.** Пусть задана система n дифференциальных уравнений первого порядка

$$y_1' = f_1(x, y_1, \dots y_n)$$

.................................

$$y_n' = f_n(x, y_1, \dots y_n)$$

Обозначим

$$F_2 = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial y_k} f_k$$

$$F_3 = \frac{\partial F_2}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_2}{\partial y_k} f_k$$

.................................

$$F_{n-1} = \frac{\partial F_{n-2}}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_{n-2}}{\partial y_k} f_k$$

Потребуем, чтобы функция $F_{n-1}$ была бы дифференцируемой по совокупности переменных. Потребуем, чтобы определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_n} \end{vmatrix} \neq 0$$

Тогда система n дифференциальных уравнений эквивалентна одному дифференциальному уравнению n-ого порядка.

*Доказательство*. Метод доказательства называется *методом исключения* переменных и применяется на практике при сведении системы к одному уравнению. Продифференцируем $F_{n-1}$:

$$F_n = \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_k} y_k'$$

1) Построим алгоритм метода исключения.

Пусть $y_1, \ldots y_n$ - решения системы ($y_1' = f_1, \ldots y_n' = f_n$), тогда уравнения системы $F_2 = \ldots, F_{n-1} = \ldots$ представляют собой тождества

$$F_2 = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial y_k} y_k' = y_1''$$

$$F_3 = \frac{\partial F_2}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_2}{\partial y_k} y_k' = y_1'''$$

...................................

$$F_{n-1} = \frac{\partial F_{n-2}}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_{n-2}}{\partial y_k} y_k' = y_1^{(n-1)}$$

$$F_n = \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_k} y_k' = y_1^{(n)}$$

Получены выражения производных

$y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots y_n)$,

$y_1'' = F_2(x, y_1, y_2, \ldots y_n)$,

$y_1''' = F_3(x, y_1, y_2, \ldots y_n)$,

...

$y_1^{(n-1)} = F_{n-1}(x, y_1, y_2, \ldots y_n)$.

Из этих уравнений можно выразить $y_2, \ldots y_n$ через $y_1', \ldots y_1^{(n-1)}$, так как определитель системы этих уравнений $\Delta \neq 0$.

Подставим выражения $y_2, \ldots y_n$ через $y_1', \ldots y_1^{(n-1)}$ в последнее уравнение $y_1^{(n)} = F_n\left(x, y_1, y_2\left(y_1' \ldots y_1^{(n-1)}\right), \ldots y_n\left(y_1' \ldots y_1^{(n-1)}\right)\right)$. Так как $y_1, \ldots y_n$ - решения системы $y_1' = f_1, \ldots y_n' = f_n$, то они являются и решениями полученного уравнения. Следовательно, система $y_1' = f_1, \ldots y_n' = f_n$ сведена к одному уравнению n-ого порядка.

2) Покажем эквивалентность решений. Предположим, что $y_1, ... y_n$- решения полученного уравнения, покажем, что $y_1, ... y_n$- решения системы.

$y_1' = f_1$ , $y_1'' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} y_1' + \sum_{k=2}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial y_k} y_k'$ . Обозначим $y_1'' = F_2$ .

$y_1''' = \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y_1} y_1' + \sum_{k=2}^{n} \frac{\partial F_2}{\partial y_k} y_k'$ . Обозначим $y_1''' = F_3$, и т.д.

$y_1^{(n)} = \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x} + \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_1} y_1' + \sum_{k=2}^{n} \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_k} y_k'$ . Обозначим $y_1^{(n)} = F_n$ .

Приравниваем полученные здесь функции $F_2, F_3, ... F_n$ введенным ранее, сокращая первые и вторые слагаемые, получаем систему уравнений

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial y_k} \left( y_k' - f_k \right) = 0$$

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{\partial F_2}{\partial y_k} \left( y_k' - f_k \right) = 0$$

....................................

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_k} \left( y_k' - f_k \right) = 0 .$$

Определитель этой системы равен $\Delta \neq 0$, следовательно, в качестве единственного решения системы имеем $y_2' = f_2, ... y_n' = f_n$. Поэтому решения эквивалентны. Теорема доказана.

Пример. $\begin{aligned} \dot{x} &= 2x + y \\ \dot{y} &= x + 2y \end{aligned}$

$\ddot{x} = 2\dot{x} + \dot{y} = 2\dot{x} + x + 2y = 2\dot{x} + x + 2(\dot{x} - 2x) = 4\dot{x} - 3x$,

$\ddot{x} - 4\dot{x} + 3x = 0, \quad k^2 - 4k + 3 = 0, \quad k_1 = 1, k_2 = 3,$

$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{3t}$,

$y(t) = \dot{x}(t) - 2x(t) = C_1 e^t + 3C_2 e^{3t} - 2C_1 e^t - 2C_2 e^{3t} = -C_1 e^t + C_2 e^{3t}$

Функция $\vec{y} = \vec{\varphi}(x, \vec{C})$ называется **общим решением** системы, если

1) для любого $\vec{C}$ $\vec{y} = \vec{\varphi}(x, \vec{C})$ - решение системы
2) для произвольных начальных условий $(x_0, \vec{y}_0)$ найдется $\vec{C}_0$, что $\vec{y}_0 = \vec{\varphi}(x_0, \vec{C}_0)$.

Если зафиксировать $\vec{C}$ в общем решении, получим **частное решение** системы.

**Задача Коши.**

*Найти решение системы* $\vec{y}' = \vec{f}(x, \vec{y})$, *удовлетворяющее заданным начальным условиям* $\vec{y}_0 = \vec{y}(x_0)$.

**Теорема Коши** о существовании и единственности решения задачи Коши

*Пусть функция* $\vec{f}(x, \vec{y})$*непрерывна по совокупности переменных. Пусть существуют и непрерывны частные производные* $\dfrac{\partial f_k}{\partial y_s}, \quad k = 1,...n, \quad s = 1,...n$

*Тогда существует и единственно решение задачи Коши.*

**Первые интегралы.**

Пусть выполнены условия теоремы Коши. Рассмотрим решение задачи Коши $\vec{y}(x, x_0)$ при заданных начальных условиях $\vec{y}(x_0) = \vec{y}_0$. По теореме Коши оно существует и единственно. Это решение $\vec{y} = \vec{\varphi}(x, x_0, \vec{y}_0)$можно представить себе как некоторую интегральную кривую, соединяющие точки $(x_0, \vec{y}_0)$, $(x, \vec{y})$.

Если в качестве начальных условий выбрать $\vec{y}(x) = \vec{y}$, то по теореме Коши через эту точку проходит та же единственная интегральная кривая, ее уравнение можно записать в виде $\vec{y}_0 = \vec{\phi}(x_0, x, \vec{y})$. Зафиксируем $x_0$, обозначим $\vec{C} = \vec{y}_0$, получим соотношение $\vec{\phi}(x, \vec{y}) = \vec{C}$ – **общий интеграл** *системы дифференциальных уравнений (векторное соотношение).* **Первый интеграл** *системы дифференциальных уравнений – скалярная составляющая общего интеграла.* **Общий интеграл** *системы дифференциальных уравнений – векторная функция, сохраняющая свое значение на решениях системы.* **Первый интеграл** *системы дифференциальных уравнений – скалярная функция, сохраняющая свое значение на решениях системы.*

Знание одного первого интеграла позволяет понизить порядок системы на единицу. Знание общего интеграла дает общее решение системы, если только можно разрешить уравнение $\vec{\phi}(x, \vec{y}) = \vec{C}$ относительно $\vec{y}$.

**Производной скалярной функции в силу системы** называется

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \phi}{\partial y_k} f_k .$$

Скалярная функция $\phi(x, y_{1,...}y_n)$ является первым интегралом, если

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \phi}{\partial y_k} f_k = 0 .$$

**Симметричная форма записи системы.**

Запишем уравнения системы в нормальной (покоординатной) форме

$$y_1' = \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1,... y_n)$$

...............................

$$y_n' = \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1,... y_n)$$

и запишем эти уравнения в симметричном виде

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy_1}{f_1(x, y_1,\ldots y_n)}=\ldots=\frac{dy_n}{f_n(x, y_1,\ldots y_n)}.$$

Или, заменяя переменные и правые части $x \leftrightarrow x_{n+1}$, $y_1 \leftrightarrow x_1,\ldots y_n \leftrightarrow x_n$, $f_1 \leftrightarrow X_1,\ldots f_n \leftrightarrow X_n$, $1 \leftrightarrow X_{n+1}$,

получим **симметричную форму записи системы**

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1,\ldots x_{n+1})}=\ldots=\frac{dx_{n+1}}{X_{n+1}(x_1,\ldots x_{n+1})}.$$

На переходе к симметричной форме записи основан **метод интегрируемых комбинаций**, которым иногда удается получить один или несколько первых интегралов и понизить тем самым порядок системы или решить ее.

*Пример.* $\dot{x}=\dfrac{x}{x^2+y^2}\quad \dot{y}=\dfrac{y}{x^2+y^2}$

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=\frac{x}{x^2+y^2}\\ \frac{dy}{dt}&=\frac{y}{x^2+y^2}\end{aligned}\right., \quad \frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\Rightarrow y=Cx \qquad \frac{dx}{dt}=\frac{1}{x(1+C^2)}, \quad xdx=\frac{dt}{1+C^2}$$

$$\frac{x^2}{2}=\frac{1}{1+C^2}t+C_1, \quad \frac{y^2}{2}=\frac{C^2}{1+C^2}t+C_1C^2$$

**Автономные системы и свойства их решений.**

Система называется **автономной**, если в ее правую часть не входит явно независимая переменная: $\vec{y}'=\vec{f}(\vec{y})$.

Решение автономной системы можно рассматривать в пространстве координат $y_1,\ldots y_n$, которое принято называть **фазовым пространством.** Проекция интегральной кривой на это пространство называется **фазовой траекторией** (или просто траекторией). Вообще говоря, любую систему можно сделать автономной, вводя дополнительную фазовую координату – независимую переменную $y_{n+1}=x$ и дополнительное уравнение $y'_{n+1}=x'=1$. Фазовое пространство такой системы принято называть *расширенным фазовым пространством.*

*Свойства решений автономных систем.*

1) *Если* $\vec{y}=\vec{\varphi}(x)$ *- решение системы, то и* $\vec{y}=\vec{\varphi}(x+C)$ *тоже решение.*

$$\frac{d\vec{\varphi}(x+C)}{dx}=\frac{d\vec{\varphi}(x+C)}{d(x+C)}=\vec{f}(\vec{\varphi}(x+C)).$$

*Следствие*. Фазовая траектория $\vec{y}=\vec{\varphi}(x+C)$ - это та же фазовая траектория, что и $\vec{y}=\vec{\varphi}(x)$.

В самом деле, любая точка $(x + C,\ \vec{y})$ первой фазовой траектории является точкой $(x,\ \vec{y})$ второй фазовой траектории и наоборот.

2) *Две фазовых траектории либо не имеют общих точек, либо совпадают.*

Пусть две различных фазовых траектории $\varphi(x), \phi(x)$ имеют общую точку $\varphi(x_1) = \phi(x_2)$. Рассмотрим решение $v(x) = \phi(x + (x_2 - x_1))$.
$v(x_1) = \phi(x_1 + (x_2 - x_1)) = \phi(x_2) = \varphi(x_1)$. Следовательно, по теореме Коши $v(x) \equiv \varphi(x)$. Но $v(x)$ - это траектория $\phi(x)$, сдвинутая на $x_2 - x_1$ по аргументу. По следствию, обе фазовые траектории являются одной фазовой траекторией.

*Следствие. Множество фазовых траекторий автономной системы в фазовом пространстве представляет собой совокупность непересекающихся кривых.*

Точка $\vec{a}$ называется **точкой покоя (точкой равновесия**) автономной системы, если $\vec{f}(\vec{a}) = 0$.

3) *Если точка $\vec{a}$ - точка покоя, то $\vec{y} \equiv \vec{a}$ - решение системы.*

В самом деле, $\vec{y}' = \vec{a}' = 0 = \vec{f}(\vec{a})$.

4) *Любая фазовая траектория автономной системы есть траектория одного из трех типов:*
- *гладкая, не самопересекающаяся кривая,*
- *замкнутая гладкая кривая,*
- *точка покоя.*

**Фазовый поток.**

Рассмотрим решение задачи Коши автономной системы $\vec{y}(x,\ \vec{y}_0)$. Определим *фазовый поток как оператор $g^x$ сдвига (по аргументу $x$) по фазовым траекториям системы* $g^x \vec{y}_0 = \vec{y}(x,\ \vec{y}_0)$.

Рассмотрим некоторую область $D$ фазового пространства (фазовым) объемом $V_0$. Фазовый поток переводит эту область в область $D_x$ объемом $V_x$.

*Справедлива теорема Лиувилля* $\dfrac{dV_x}{dx} = \int\limits_{D_x} div\vec{f}(\vec{y})d\mu(\vec{y})$.

Здесь мерой $\mu(\vec{y})$ в фазовом пространстве может служить фазовый объем $V$, $div\vec{f}(\vec{y}) = \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1} + ... + \dfrac{\partial f_n}{\partial y_n} = Tr\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{y}}$ (дивергенция векторного поля правых частей системы или след матрицы Якоби). Левая часть этой формулы представляет собой изменение фазового объема в единицу «времени» – аргумента, т.е. известный из теории поля поток векторного поля правых частей системы – фазовых скоростей. Приведенная формула аналогична формуле Остроградского – Гаусса в теории поля.

Если $div\vec{f}(\vec{y}) = 0$, то $V_x = const$.

Если $\vec{f}(\vec{y}) = A(x)\vec{y}$, то $div\vec{f}(\vec{y}) = TrA(x) = a_{11}(x) + ... + a_{nn}(x)$, что дает формулу для определения фазового объема $V(x) = C\exp\left(\int\limits_{D_x} TrA(x)dx\right)$, что совпадает с формулой Остроградского – Лиувилля определителя Вронского для линейных автономных систем. Поэтому определитель Вронского имеет смысл фазового объема (определитель всегда имеет смысл некоторого объема, вспомним хотя бы смысл смешанного произведения векторов).

## Лекция 21. Системы линейных дифференциальных уравнений.

*Неоднородную систему* линейных дифференциальных уравнений можно записать в виде

$$\vec{y}' = A(x)\vec{y} + \vec{f}(x).$$

*Однородную систему* линейных дифференциальных уравнений можно записать в виде

$$\vec{y}' = A(x)\vec{y}.$$

Все теоремы для линейных систем аналогичны соответствующим теоремам для линейных дифференциальных уравнений высших порядков. Этого и следовало ожидать, так как система дифференциальных уравнений сводится к дифференциальному уравнению высшего порядка.

**Теоремы о свойствах решений** однородной и неоднородной системы.

Если $\vec{y}_{o1}, \vec{y}_{o2}$ - решения однородной системы, то $\vec{y}_{o1} + \vec{y}_{02}, \lambda\vec{y}_{o1}, \lambda\vec{y}_{02}$ - решения однородной системы.

Если $\vec{y}_{0,}\ \vec{y}_{н}$ - решения однородной и неоднородной систем, то $\vec{y}_0 + \vec{y}_н$ - решение неоднородной системы.

Если $\vec{y}_{н1}, \vec{y}_{н2}$ - решения неоднородной системы, то $\vec{y}_{н1} - \vec{y}_{н2}$ - решение однородной системы.

Доказательство.

$$(\vec{y}_{o1} + \vec{y}_{o2})' = \vec{y}\,'_{01} + \vec{y}\,'_{02} = A(x)\vec{y}_{o1} + A(x)\vec{y}_{02} = A(x)(\vec{y}_{01} + \vec{y}_{02}),$$

$$(\lambda\vec{y}_{01})' = \lambda\vec{y}\,'_{01} = \lambda A(x)\vec{y}_{01} = A(x)(\lambda\vec{y}_{01})$$

$$(\vec{y}_0 + \vec{y}_н)' = \vec{y}\,'_o + \vec{y}\,'_н = A(x)\vec{y}_0 + A(x)\vec{y}_н + \vec{f}(x) = A(x)(\vec{y}_0 + \vec{y}_н) + \vec{f}(x)$$

$$(\vec{y}_{н1} - \vec{y}_{н2})' = \vec{y}\,'_{н1} - \vec{y}\,'_{н2} = A(x)\vec{y}_{н1} + \vec{f}(x) - \left(A(x)\vec{y}_{н2} + \vec{f}(x)\right) = A(x)(\vec{y}_{н1} - \vec{y}_{н2})$$

**Теорема.** *Множество решений линейной однородной системы есть линейное пространство.*

Из теорем о свойствах решений видно, что операции сложения и умножения на число на решениях однородной системы определены корректно.

Легко проверяется ассоциативность по сложению, существования «нуля» – тривиального решения $\vec{y}(x)\equiv 0$, существование «противоположного элемента» $(-\vec{y}(x))$, коммутативность по сложению. Отсюда следует, что решения однородной системы образуют коммутативную группу по сложению (абелев модуль) (4 аксиомы линейного пространства). Существует единица – число, справедлива ассоциативность по умножению на число (еще 2 аксиомы).

Наконец, справедлива дистрибутивность по сложению решений и чисел (последние 2 аксиомы). Таким образом, выполнены все 8 аксиом для корректно введенных операций сложения решений и умножения решения на число. Следовательно, множество решений однородной системы образует линейное пространство. Заметим, что точно так же доказывалась аналогичная теорема для дифференциального уравнения n-ого порядка.

Функции $\vec{y}_1(x),\ldots\vec{y}_n(x)$ называются *линейно независимыми,* если

$\lambda_1\bar{y}_1(x)+\ldots+\lambda_n\bar{y}_n(x)\equiv 0\Rightarrow\lambda_1=0,\ldots\lambda_n=0$.

Функции $\vec{y}_1(x),\ldots\vec{y}_n(x)$ называются *линейно зависимыми,* если

$\exists\lambda_1,..\lambda_k\neq 0,\ldots\lambda_n:\lambda_1\vec{y}_1+\ldots\lambda_n\vec{y}_n\equiv 0$.

Введем *определитель Вронского* $W=\begin{vmatrix} y_{11}(x) & \ldots & y_{n1}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{1n}(x) & \ldots & y_{nn}(x) \end{vmatrix}$, по столбцам которого расположены векторы $\vec{y}_1(x)=\begin{pmatrix} y_{11}(x) \\ \ldots \\ y_{1n}(x) \end{pmatrix},\ldots\vec{y}_n(x)=\begin{pmatrix} y_{n1}(x) \\ \ldots \\ y_{nn}(x) \end{pmatrix}$, введем также матрицу $Y(x)=\begin{pmatrix} y_{11}(x) & \ldots & y_{n1}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{1n}(x) & \ldots & y_{nn}(x) \end{pmatrix}$, $W(x)=\det Y(x)$.

**Теорема.** Если функции $\vec{y}_1(x),\ldots\vec{y}_n(x)$ линейно зависимы, то $W(x)\equiv 0$.

Доказательство. Так как функции линейно зависимы, то одна из них линейно выражается (тождественно) через остальные, поэтому соответствующий столбец определителя Вронского линейно выражается через остальные. Тогда по свойству определителя $W(x)\equiv 0$.

**Теорема.** Пусть $\vec{y}_1(x),\ldots\vec{y}_n(x)$ - решения однородной системы и $\exists x_0:W(x_0)=0$, тогда решения $\vec{y}_1(x),\ldots\vec{y}_n(x)$ линейно зависимы.

Доказательство. Т.к. $W(x_0)=0$, то его столбцы в $x_0$ линейно зависимы, т.е. $\exists\lambda_1,..\lambda_k\neq 0,\ldots\lambda_n:\lambda_1\vec{y}_1(x_0)+\ldots\lambda_n\vec{y}_n(x_0)\equiv 0$.

Рассмотрим решение $\vec{\bar{y}}(x)\equiv\lambda_1\vec{y}_1+\ldots\lambda_n\vec{y}_n$ (с теми же коэффициентами).

$\vec{\bar{y}}(x)$ - решение однородной системы как линейная комбинация решений однородной системы (теоремы о свойствах решений). Начальные условия для этого решения в точке $x_0$, как показано выше, нулевые. Но есть решение однородной системы (тривиальное решение $\vec{y}(x)\equiv 0$), имеющее те же начальные условия. Следовательно, по теореме Коши решение $\vec{\bar{y}}(x)$ и есть тривиальное решение. Тогда $\vec{\vec{y}}(x) \equiv \lambda_1 \vec{y}_1 + ... \lambda_n \vec{y}_n \equiv 0, \quad (\lambda_k \neq 0)$, следовательно, решения $\vec{y}_1(x),... \vec{y}_n(x)$ линейно зависимы.

**Следствие.** Равенство определителя Вронского нулю для решений однородной системы хотя бы в одной точке – критерий линейной зависимости решений, отличие определителя Вронского от нуля для решений однородной системы хотя бы в одной точке – критерий линейной независимости решений.

Доказательство. Пусть $\exists x_0 : W(x_0) = 0$, тогда решения $\vec{y}_1(x),... \vec{y}_n(x)$ линейно зависимы. Если решения $\vec{y}_1(x),... \vec{y}_n(x)$ линейно зависимы, то $W(x) \equiv 0$ по теореме о равенстве определителя Вронского нулю для системы линейно зависимых функций. Заметим, что тогда $\exists x_0 : W(x_0) = 0 \Rightarrow W(x) \equiv 0$.

Пусть $\exists x_0 : W(x_0) \neq 0$, если решения $\vec{y}_1(x),... \vec{y}_n(x)$ линейно зависимы, то $W(x) \equiv 0$ (противоречие). Пусть решения линейно независимы. Если $\exists x_0 : W(x_0) = 0$, тогда решения $\vec{y}_1(x),... \vec{y}_n(x)$ линейно зависимы (противоречие).

**Теорема.** Размерность пространства решений однородной системы равна n.

Доказательство. Надо доказать 1) существуют n линейно независимых решений однородной системы, 2) любое решение однородной системы линейно выражается через эти линейно независимые решения.

1) В любой точке $(x_{0,} \ \ y_{10,} ... y_{n0})$ для однородной системы выполнены условия теоремы Коши, следовательно, через любую такую точку пройдет единственная интегральная кривая – график решения однородной системы. Зададим такие точки – начальные условия, которые по теореме Коши определят решения

$$\vec{y}_1(x), \quad \vec{y}_1(x_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{y}_2(x), \quad \vec{y}_2(x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} ... \vec{y}_n(x), \quad \vec{y}_n(x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Эти решения линейно независимы, так как $W(x_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

Существование n линейно независимых решений однородной системы доказано.

2) Рассмотрим произвольное решение однородной системы $\vec{\vec{y}}(x)$. В точке $x_0$ вектор $\vec{\vec{y}}(x_0)$ разлагается по естественному базису

$$\vec{y}_1(x_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{y}_2(x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} ... \vec{y}_n(x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix}. \text{Поэтому } \vec{\vec{y}}(x_0) = C_1 \vec{y}_1(x_0) + ... + C_n \vec{y}_n(x_0)$$

Рассмотрим решение $\vec{\vec{y}}(x) = C_1 \vec{y}_1(x) + ... + C_n \vec{y}_n(x)$ - линейную комбинацию этих линейно независимых решений. Оно имеет те же начальные условия, что и выбранное произвольное решение $\vec{\vec{y}}(x)$. Следовательно, по теореме Коши выбранное произвольное решение $\vec{\tilde{y}}(x)$ и есть (тождественно равно) $\vec{\tilde{y}}(x) = C_1\vec{y}_1(x) + ... + C_n\vec{y}_n(x)$. Поэтому произвольное решение линейно выражается через выбранные линейно независимые решения. Теорема доказана.

*Любые n линейно независимых решений однородной системы представляют собой базис в пространстве решений и называются* ***фундаментальной системой решений*** *однородной системы.*
Матрица $Y(x)$, составленная из этих решений $(\det Y(x)) = W(x) \neq 0$, называется **фундаментальной матрицей** однородной системы.

**Теорема о структуре общего решения однородной системы.**

Общее решение однородной системы представляет собой линейную комбинацию решений фундаментальной системы решений.

$\vec{y}_{oo}(x) = C_1\vec{y}_1(x) + ... + C_n\vec{y}_n(x)$.

Доказательство. Проверим, что $\vec{y}_{oo}(x) = C_1\vec{y}_1(x) + ... + C_n\vec{y}_n(x)$ является общим решением, исходя из определения общего решения.

1) $\vec{y}_{oo}(x) = C_1\vec{y}_1(x) + ... + C_n\vec{y}_n(x)$ - решение однородной системы как линейная комбинация ее решений (теорема о свойствах решений).
2) Зададим произвольные начальные условия $\vec{y}_0 = \begin{pmatrix} y_{01} \\ ... \\ y_{0n} \end{pmatrix}$ и покажем, что можно единственным образом выбрать набор констант $C_1,...C_n$, при котором $\vec{y}_{oo}(x_0) = C_1\vec{y}_1(x_0) + ... + C_n\vec{y}_n(x_0) = \vec{y}_0$. Запишем это соотношение покоординатно как систему уравнений относительно $C_1,...C_n$.

$$C_1 y_{11}(x_0) + ...C_n y_{n1}(x_0) = y_{01}$$
$$C_1 y_{12}(x_0) + ...C_n y_{n2}(x_0) = y_{02}$$
$$.........................................$$
$$C_1 y_{1n}(x_0) + ...C_n y_{nn}(x_0) = y_{0n}$$

Определитель этой системы равен $W(x_0) \neq 0$, так как решения линейно независимы. Поэтому набор констант $C_1,...C_n$ определяется из системы уравнений единственным образом. Теорема доказана.

**Следствие.** Общее решение однородной системы можно записать в виде

$$\vec{y}_{oo}(x) = Y(x)\vec{C}, \quad \vec{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ ,,, \\ C_n \end{pmatrix}.$$

**Матрица Коши (матрициант).**

Пусть надо записать решение задачи Коши, удовлетворяющее начальным условиям $\vec{y}(x_0) = \vec{y}_0$.

$$\vec{y}(x_0)=\vec{y}_0=Y(x_0)\vec{C}\Rightarrow\vec{C}=Y^{-1}(x_0)\vec{y}_0,\quad \vec{y}(x)=Y(x)\vec{C}=Y(x)Y^{-1}(x_0)\vec{y}_0=K(x,x_0)\vec{y}_0$$

Матрица $K(x,x_0)=Y(x)Y^{-1}(x_0)$ называется **матрицей Коши.** $\vec{y}(x)=K(x,x_0)\vec{y}_0$**.**

**Теорема.** *Фундаментальная матрица удовлетворяет однородной системе,* $Y(x)'=A(x)Y(x)$.

Доказательство. Столбцы фундаментальной матрицы являются решениями однородной системы. Объединяя запись $\vec{y}'_k(x)=A(x)\vec{y}_k(x), \quad k=1,...n$ в матрицу, получим утверждение теоремы.

**Формула Остроградского – Лиувилля.**

$$W(x)=C\exp\left(\int TrA(x)dx\right)=W(x_0)\exp\left(\int\limits_{x_0}^{x} TrA(x)dx\right),\quad TrA(x)=a_{11}(x)+a_{22}(x)+...+a_{nn}(x)$$

Выведем формулу Остроградского – Лиувилля.

Фундаментальная матрица системы является решением однородной системы. Запишем уравнение для k –го столбца фундаментальной матрицы – координат решения $y_k$ :

$$\begin{pmatrix} y'_k \\ ... \\ y'_{k_n} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_{k_1} \\ ... \\ y_{k_n} \end{pmatrix}.$$

Отсюда $y'_{ks}=a_{s1}y_{k1}+a_{s2}y_{k2}+...+a_{sn}y_{kn}$ .

Запишем определитель Вронского и продифференцируем его, подставляя вместо производных координат решений полученное соотношение.

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_{11} & y_{21} & ... & y_{n1} \\ ... & ... & ... & ... \\ y_{1\,n-1} & y_{2\,n-1} & ... & y_{n\,n-1} \\ y_{1\,n} & y_{2\,n} & ... & y_{n\,n} \end{vmatrix},W'(x)=\begin{vmatrix} y'_{11} & y'_{21} & ... & y'_{n1} \\ ... & ... & ... & ... \\ y_{1\,n-1} & y_{2\,n-1} & ... & y_{n\,n-1} \\ y_{1\,n} & y_{2\,n} & ... & y_{n\,n} \end{vmatrix}+...$$

$$+\begin{vmatrix} y_{11} & y_{21} & ... & y_{n1} \\ ... & ... & ... & ... \\ y'_{1\,n-1} & y'_{2\,n-1} & ... & y'_{n\,n-1} \\ y_{1\,n} & y_{2\,n} & ... & y_{n\,n} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} y_{11} & y_{21} & ... & y_{n1} \\ ... & ... & ... & ... \\ y_{1\,n-1} & y_{2\,n-1} & ... & y_{n\,n-1} \\ y'_{1\,n} & y'_{2\,n} & ... & y'_{n\,n} \end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}y_{11}+a_{12}y_{12}+...a_{1n}y_{1n} & a_{11}y_{21}+a_{12}y_{22}+...a_{1n}y_{2n} & ... & a_{11}y_{n1}+...+a_{1n}y_{nn} \\ ... & ... & ... & ... \\ y_{1\,n-1} & y_{2\,n-1} & ... & y_{n\,n-1} \\ y_{1\,n} & y_{2\,n} & ... & y_{n\,n} \end{vmatrix}+$$

$$+\ldots+\begin{vmatrix} y_{11} & y_{21} & \cdots & y_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1\,1}y_{11}+\ldots a_{n-1\,n}y_{1\,n} & a_{n-1\,1}y_{21}+\ldots a_{n-1\,n}y_{2\,n} & \cdots & a_{n-1\,1}y_{n\,1}+\ldots a_{n-1\,n}y_{n\,n} \\ y_{1\,n} & y_{2\,n} & \cdots & y_{n\,n} \end{vmatrix}+$$

$$\begin{vmatrix} y_{11} & y_{21} & \cdots & y_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{1\,n-1} & y_{2\,n-1} & \cdots & y_{n\,n-1} \\ a_{n\,1}y_{11}+\ldots a_{n\,n}y_{1\,n} & a_{n\,1}y_{21}+\ldots a_{n\,n}y_{2\,n} & \cdots & a_{n\,1}y_{n\,1}+\ldots a_{n\,n}y_{n\,n} \end{vmatrix}=$$

(расписывая в сумму определителей, учитывая равенство нулю определителей с одинаковыми строками)

$$\begin{vmatrix} a_{11}y_{11} & a_{11}y_{21} & \cdots & a_{11}y_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{1\,n-1} & y_{2\,n-1} & \cdots & y_{n\,n-1} \\ y_{1\,n} & y_{2\,n} & \cdots & y_{n\,n} \end{vmatrix}+\ldots+\begin{vmatrix} y_{11} & y_{21} & \cdots & y_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{1\,n-1} & y_{2\,n-1} & \cdots & y_{n\,n-1} \\ a_{n\,n}y_{1\,n} & a_{n\,n}y_{2\,n} & \cdots & a_{n\,n}y_{n\,n} \end{vmatrix}=$$

$(a_{11}+\ldots+a_{nn})W(x)$.

Получено соотношение $W'(x)=TrA(x)W$, где $TrA(x)=a_{11}(x)+\ldots+a_{nn}(x)$ - след матрицы системы. Отсюда имеем формулу Остроградского – Лиувилля.

$W(x)=C\exp\left(\int TrA(x)dx\right)$.

Заметим, что эту формулу можно получить как следствие из теоремы Лиувилля о фазовом объеме.

**Теорема о структуре общего решения неоднородной системы.**

*Общее решение неоднородной системы равно сумме общего решения однородной системы и частного решения неоднородной системы.*

$\vec{y}_{он}(x)=\vec{y}_{оо}(x)+\vec{y}_{чн}(x)$

Доказательство. 1) $\vec{y}_{он}(x)=\vec{y}_{оо}(x)+\vec{y}_{чн}(x)$ - решение неоднородной системы по теореме о свойствах решений.

2) Зададим произвольные начальные условия $\vec{y}_{он}(x_0)=\vec{y}_0$. Выберем какое-либо частное решение неоднородное системы $\vec{y}_{чн}(x)$и вычислим для него начальные условия в $x_0$ $\vec{y}_{чн}(x_0)$. Составим систему уравнений $\vec{y}_{оо}(x_0)=\vec{y}_{он}(x_0)-\vec{y}_{чн}(x_0)=\vec{u}$ и запишем ее покоординатно.

$C_1y_{11}(x_0)+\ldots+C_ny_{n1}(x_0)=u_1$

..............................................

$C_1y_{1n}(x_0)+\ldots+C_ny_{nn}(x_0)=u_n$

Определитель этой системы – определитель Вронского, он не равен нулю, так как составлен из линейно независимых решений, составляющих фундаментальную систему решений. Следовательно, набор констант из этой системы уравнений определяется однозначно. Теорема доказана.

**Метод вариации произвольной постоянной.**

Общее решение однородной системы можно записать в виде

$\vec{y}_{oo}(x) = Y(x)\vec{C}$, где $Y(x)$ - фундаментальная матрица системы, $\vec{C}$ - вектор произвольных постоянных.

Будем искать решение неоднородной системы в том же виде, варьируя вектор произвольных постоянных:

$$\vec{y}_{он}(x) = Y(x)\vec{C}(x).$$

Вычисляем производную и подставляем в уравнение неоднородной системы:

$$\vec{y}'_{он}(x) = Y'(x)\vec{C}(x) + Y(x)\vec{C}'(x),$$

$$\vec{y}'_{он}(x) = Y'(x)\vec{C}(x) + Y(x)\vec{C}'(x) = A(x)Y(x)\vec{C}(x) + \vec{f}(x),$$

Так как фундаментальная матрица удовлетворяет уравнению однородной системы, то $Y'(x) = A(x)Y(x)$. Поэтому в предыдущем уравнении (как и всегда в методе вариации) сокращается пара слагаемых. Получаем уравнение

$Y(x)\vec{C}'(x) = \vec{f}(x)$. Так как фундаментальная матрица не вырождена ($\det Y(x) = W(x) \neq 0$), то отсюда получаем уравнение для определения вектора $\vec{C}(x)$:

$$\vec{C}'(x) = Y^{-1}(x)\vec{f}(x).$$

Интегрируя, получаем

$\vec{C}(x) = \int Y^{-1}(x)\vec{f}(x)dx + \vec{C}_1$ (здесь предполагается, что при вычислении интеграла вектор констант не добавляется, он уже добавлен в виде вектора $\vec{C}_1$).

Подставляя в $\vec{y}_{он}$, имеем

$$\vec{y}_{он}(x) = Y(x)\left(\int Y^{-1}(x)\vec{f}(x)dx + \vec{C}_1\right) = Y(x)\vec{C}_1 + Y(x)\int Y^{-1}(x)\vec{f}(x)dx.$$

Здесь в полном соответствии с теоремой о структуре общего решения неоднородной системы первое слагаемое представляет собой общее решение однородной системы, а второе слагаемое – частное решение неоднородной системы.

## Лекция 22. Однородные системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами может быть записана в виде

$$\vec{y}' = A\vec{y}, \text{ где } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \text{ (векторная форма записи)}$$

или

$$y_1' = a_{11}y_1 + ... + a_{1n}y_n$$
.................................... (покоординатная форма записи).
$$y_n' = a_{n1}y_1 + ... + a_{nn}y_n$$

Будем искать решение системы в виде $\vec{y} = e^{\lambda x}\vec{\alpha}, \quad \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ ... \\ \alpha_n \end{pmatrix}$.

Подставляя $\vec{y}$ в уравнение системы, получаем

$$\lambda e^{\lambda x}\vec{\alpha} = Ae^{\lambda x}\vec{\alpha}, \quad e^{\lambda x}\left(A\vec{\alpha} - \lambda\vec{\alpha}\right) = 0, \qquad A\vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha}.$$

Получено уравнение для определения соответствующего *собственному значению* $\lambda$ *собственного вектора* $\vec{\alpha}$ $(\vec{\alpha} \neq 0)$ линейного оператора с матрицей $A$. Система уравнений

$$A\vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha} \text{ или } (A - \lambda E)\vec{\alpha} = 0$$

имеет ненулевое решение только, когда определитель системы равен нулю, т.е.

$$|A - \lambda E| = 0.$$

Это – **характеристическое уравнение** системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. В развернутом виде его можно записать так:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Характеристическое уравнение представляет собой алгебраическое уравнение $n$- го порядка относительно $\lambda$. Из основной теоремы высшей алгебры известно, что оно имеет ровно $n$ корней. Часть корней может быть *действительными* корнями, часть - комплексными, но комплексные корни встречаются только *парами комплексно-сопряженных корней*. Это следует из действительности коэффициентов характеристического уравнения и теорем Виета.

1) Рассмотрим случай, когда все *собственные значения* $\lambda_{1,...}\lambda_n$ линейного оператора с матрицей $A$ (или все характеристические числа матрицы $A$, что одно и то же) *действительны и различны.*

Из линейной алгебры известно, что действительным различным собственным значениям $\lambda_{1,...}\lambda_n$ соответствуют линейно независимые собственные векторы $\vec{\alpha}^1,...,\vec{\alpha}^n$, которые можно определить по собственным значениям из системы уравнений

$$A\vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha} \text{ или } (A - \lambda E)\vec{\alpha} = 0.$$

В развернутом виде эти уравнения для $\lambda_{k,}$ $\vec{\alpha}^k$ можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda_k & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{1n} & ... & a_{nn} - \lambda_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1^k \\ ... \\ \alpha_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь решения системы линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами будут

$$\vec{y}^{\,1} = e^{\lambda_1 x}\vec{\alpha}^{\,1},....,\vec{y}^{\,n} = e^{\lambda_n x}\overline{\alpha}^{\,n}.$$

Проверим, что решения являются линейно независимыми. Составим определитель Вронского

$$W = \begin{vmatrix} y_1^1 & ... & y_1^n \\ ... & ... & ... \\ y_n^1 & ... & y_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1^1 & ... & \alpha_1^n \\ ... & ... & ... \\ \alpha_n^1 & ... & \alpha_n^n \end{vmatrix} \exp((\lambda_1 + ... + \lambda_n)x) \neq 0,$$ так как векторы $\vec{\alpha}^{\,1},...,\vec{\alpha}^{\,n}$ линейно независимы и определитель из координат этих векторов отличен от нуля. Так как определитель Вронского отличен от нуля, то полученные решения линейно независимы. Так как этих решений ровно n, то они составляют фундаментальную систему решений. Следовательно, общее решение системы линейных однородных уравнений может быть записано в виде

$$\vec{y}_{oo} = C_1\vec{y}_1 + ... + C_n\vec{y}_n = \sum_{k=1}^{n} C_k e^{\lambda_k x}\vec{\alpha}^{\,k}.$$

Пример. $\begin{matrix}\dot{x} = x + 4y \\ \dot{y} = x - 2y\end{matrix}$, $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$,

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6 = 0, \qquad \lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = 2$$

$$\lambda_1 = -3, \quad \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_2^1 \end{pmatrix} = 0, \quad \alpha_1^1 = -\alpha_2^1, \quad \vec{\alpha}^{\,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_2 = 2, \quad \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1^2 \\ \alpha_2^2 \end{pmatrix} = 0, \quad \alpha_1^2 = 4\alpha_2^2, \quad \vec{\alpha}^{\,2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{y}_{oo} = C_1 e^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$x = C_1 e^{-3t} + 4C_2 e^{2t}$$
$$y = -C_1 e^{-3t} + C_2 e^{2t}$$

2) Рассмотрим случай, когда среди корней характеристического уравнения имеются s простых корней $\lambda_{1,...}\lambda_s$.

Этот случай легко свести к предыдущему. Для каждого собственного значения (характеристического числа) $\lambda_{k,}$ отыщем собственный вектор $\vec{\alpha}^{\,k}$ из системы уравнений

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda_k & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{1n} & ... & a_{nn} - \lambda_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1^k \\ ... \\ \alpha_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Затем найдем соответствующие им решения из фундаментальной системы решений $\vec{y}^{\,1} = e^{\lambda_1 x}\vec{\alpha}^{\,1},....,\vec{y}^{\,s} = e^{\lambda_n x}\overline{\alpha}^{\,s}$ и запишем общее решение в виде

$$\vec{y}_{oo} = ... + C_1\vec{y}_1 + ... + C_s\vec{y}_s + ....$$

Вся разница с предыдущим случаем в том, что фундаментальная система решений не исчерпывается найденными решениями, есть еще решения, соответствующие другим корням характеристического уравнения.

3) Среди корней характеристического уравнения имеется простая пара комплексно сопряженных корней $\lambda_{1,2} = \gamma \pm i\beta$ .

Справедливо *утверждение*, которое мы примем без доказательства: *простой паре комплексно сопряженных корней* $\lambda_{1,2} = \gamma \pm i\beta$ *соответствует пара комплексно сопряженных собственных векторов* $\vec{u} \pm i\vec{v}$ .

Запишем формально соответствующую пару решений:

$$\hat{\vec{y}}_{1,2} = e^{\gamma \pm i\beta}\left(\vec{u} \pm i\vec{v}\right) = e^{\gamma x}\left(\cos\beta \pm i\sin\beta\right)\left(\vec{u} \pm i\vec{v}\right) =$$

$$e^{\gamma x}\left[\left(\vec{u}\cos\beta x - \vec{v}\sin\beta x\right) \pm i\left(\vec{u}\sin\beta x + \vec{v}\cos\beta x\right)\right]$$

Эти решения комплексные. Вместо них мы (по линейности и теоремам о свойствах решений) можем взять решения $\vec{y}_1 = \frac{1}{2}\left(\hat{\vec{y}}_1 + \hat{\vec{y}}_2\right) = e^{\gamma x}\left(\vec{u}\cos\beta x - \vec{v}\sin\beta x\right),\quad \vec{y}_2 = \frac{1}{2i}\left(\hat{\vec{y}}_1 - \hat{\vec{y}}_2\right) = e^{\gamma x}\left(\vec{u}\sin\beta x + \vec{v}\cos\beta x\right)$

Общее решение можно записать в виде:

$$\vec{y}_{oo} = \ldots + C_1\vec{y}_1 + C_2\vec{y}_2 + \ldots.$$

Пример. $\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = x + y \end{cases},\quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left[A - \lambda E\right] = \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 + 1 = 0,\quad \lambda_{1,2} = 1 \pm i .$$

$$\lambda_1 = 1 + i,\quad \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = 0,\quad \vec{\alpha}^1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{\alpha}^2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix},\quad \gamma = 1, \beta = 1,\quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}^1 = e^t\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\cos t - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\sin t\right],\quad \vec{y}^2 = e^t\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\sin t + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\cos t\right],$$

$$\vec{y}_{oo} = C_1\vec{y}_1 + C_2\vec{y}_2 = e^t\begin{bmatrix} -C_1\sin t + C_2\cos t \\ C_1\cos t + C_2\sin t \end{bmatrix}$$

$$x = e^t\left(-C_1\sin t + C_2\cos t\right)$$

$$y = e^t\left(C_1\cos t + C_2\sin t\right)$$

4) Среди корней характеристического уравнения встречаются кратные действительные корни или кратные пары комплексно сопряженных корней.

Этот случай мы не можем рассмотреть подробно, так как пока в курсе математики для инженеров не рассматривается жорданова форма матрицы, а именно к матрице с жордановыми клетками в общем случае приводится матрица системы (хотя матрица может привестись и к диагональному виду, и проблемы это не снимает). Укажем только алгоритм действий для действительного корня (или пары комплексно сопряженных корней) кратности r. Алгоритм этот основан на двух теоремах.

**Теорема.** Существует система из n линейно независимых векторов $\vec{\alpha}^{k1} \ldots \vec{\alpha}^{kq_k}$ , удовлетворяющих соотношениям

$$
\begin{aligned}
&A\vec{\alpha}^{k1} = \lambda_k \vec{\alpha}^{k1} \\
&A\vec{\alpha}^{k2} = \lambda_k \vec{\alpha}^{k2} + \vec{\alpha}^{k1} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&A\vec{\alpha}^{kq_k} = \lambda_k \vec{\alpha}^{kq_k} + \vec{\alpha}^{kq_{k-1}}
\end{aligned}
\quad .
$$

Векторы $\vec{\alpha}^{k2}...\vec{\alpha}^{kq_k}$ - присоединенные векторы, порожденные собственным вектором $\vec{\alpha}^{k1}$, $q_k$ - кратность корня $\lambda_k$, сумма $q_k$ для различных корней $\lambda_k$ равна n.

**Теорема.** Каждому корню $\lambda_k$ соответствует $q_k$ решений вида

$$
\begin{aligned}
&\vec{y}^{k1} = \vec{\alpha}^{k1} e^{\lambda_k x} \\
&\vec{y}^{k2} = (\vec{\alpha}^{k2} + x\vec{\alpha}^{k1}) e^{\lambda_k x} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\vec{y}^{kq_k} = (\vec{\alpha}^{kq_k} + x\vec{\alpha}^{kq_k - 1} + \dots + \frac{x^{q_k - 1}}{(q_k - 1)!}\vec{\alpha}^{k1}) e^{\lambda_k x}
\end{aligned}
$$

Для каждого кратного корня надо найти присоединенные векторы по первой теореме и построить решения по второй теореме.

Если порядок системы мал, то можно действовать проще.

Пусть матрица $(A - \lambda E)$ для корня, кратности $r$ будет иметь ранг $n - r$.

Это означает, что для данного корня можно подобрать r линейно независимых собственных векторов и, соответственно, r линейно независимых решений вида $\vec{y} = e^{\lambda x}\vec{\alpha}$ в фундаментальной системе решений.

Пример. $\begin{aligned} \dot{x} &= y + z \\ \dot{y} &= z + x \\ \dot{z} &= x + y \end{aligned}$, $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Заметим, что матрица симметрическая, она приводится к диагональному виду ортогональным преобразованием. Следовательно, собственные векторы можно выбрать ортогональными, так как именно в базисе из собственных векторов матрица имеет диагональный вид, а ортогональное преобразование переводит один ортонормированный базис в другой.

Запишем характеристическое уравнение и найдем его корни.

$$
|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = -(\lambda - 2)(\lambda + 1)^2 = 0, \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_{2,3} = -1
$$

$$
\lambda = 2, \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_2^1 \\ \alpha_3^1 \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{aligned} -2\alpha_1^1 + \alpha_2^1 + \alpha_3^1 &= 0 \\ \alpha_1^1 - 2\alpha_2^1 + \alpha_3^1 &= 0 \\ \alpha_1^1 + \alpha_2^1 - 2\alpha_3^1 &= 0 \end{aligned} \quad \alpha_1^1 = \alpha_2^1 = \alpha_3^1, \quad \vec{\alpha}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.
$$

$$
\vec{y}^1 = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.
$$

$\lambda = -1, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$. Кратность корня равна 2. Ранг матрицы равен n-r = 3 – 2 = 1. Из полученного уравнения можно выбрать координаты двух линейно независимых векторов. Например,

$$\vec{\alpha}^2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\alpha}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \text{ Тогда } \vec{y}^2 = e^{-t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{y}^3 = e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{y}_{oo} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-t} \left( C_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \text{ или}$$

$$\begin{cases} x = C_1 e^{2t} - 2C_2 e^{-t} \\ y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t} + C_3 e^{-t} \\ z = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t} - C_3 e^{-t} \end{cases}.$$

Если действительному корню $\lambda_k$ кратности r соответствует m(m<r) линейно независимых собственных векторов, то решение надо искать в виде $\vec{y} = e^{\lambda_k x} \left( \vec{w}_1 + x\vec{w}_2 + x^2 \vec{w}_3 + \ldots x^{r-m-1} \vec{w}_{r-m} \right)$. Координаты векторов $\vec{w}_k$, $k = 1,2,\ldots r-.m$ отыскиваются путем подстановки решения в систему дифференциальных уравнений и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях x.

Пример. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 4y \\ \dot{y} = -x - y \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0, \quad \lambda_{1,2} = 1, \quad Rang(A - \lambda E) = 1$$

$x = (A + Bt)e^t$, $y = (D + Kt)e^t$. Подставим x, y в систему уравнений, приравняем коэффициенты при $e^t, te^t$ в каждом уравнении, получим систему уравнений для определения неопределенных коэффициентов

$\begin{cases} A + B = 3A + 4D \\ B = 3B + 4K \\ D + K = -A - D \end{cases}$, откуда получим $\begin{cases} B = -2K \\ 2A + 4D = B \end{cases}$. Можно выбрать, например,

1) $B = K = 0$, $D = 1$, $A = -2$, тогда $x = -2e^t$, $y = e^t$ или

2) $D = \frac{1}{2}, K = -1, A = 0, B = 2,$ тогда $x = 2t\, e^t$, $y = \left( \frac{1}{2} - t \right) e^t$.

## Лекции 23-24. Устойчивость движения, классификация точек покоя, теоремы Ляпунова.

Рассмотрим нелинейную систему дифференциальных уравнений, запишем ее уравнения в векторной форме

$$\dot{\bar{x}} = \vec{f}(\bar{x}, t)$$

или в координатной форме

$$\dot{x}_k = f_k(x_1,\dots x_n, t) \quad k = 1,\dots n\,.$$

В качестве независимой переменной выбрано время t, поэтому система дифференциальных уравнений является моделью некоторого процесса – изменения переменной $\vec{x}(t)$ во времени или *движения материальной точки,* занимающей в фазовом пространстве текущее положение $(x_1,\dots x_n)$ и изменяющей это положение с изменением времени t. Таким образом, *движение – это частное решение системы дифференциальных уравнений.*

Зададим некоторые начальные условия $t_0,\ \vec{x}(t_0)=\vec{x}_0$. Пусть выполняются условия теоремы Коши (непрерывны $\vec{f},\quad \dfrac{\partial f_k}{\partial x_s}\quad k=1,\dots n,\quad s=1,\dots n$ в рассматриваемой области). Тогда через любую точку расширенного фазового пространства $(t_0, x_{01}\dots x_{0n})$ из рассматриваемой области проходит единственная интегральная кривая – график частного решения $\vec{x}(t, t_0, x_{01}, \dots x_{0n})$. Назовем движение, «начинающееся» в точке $(t_0, x_{01}\dots x_{0n})$ *невозмущенным движением* $\vec{x}(t, t_0, x_{01}, \dots x_{0n})$. Если «возмутить» – несколько изменить начальные условия в фазовом пространстве, выбрать их $(t_0, \hat{x}_{01}\dots \hat{x}_{0n})$, то изменится и движение. Назовем движение, «начинающееся» в точке $(t_0, \hat{x}_{01}\dots \hat{x}_{0n})$, *возмущенным движением* $\vec{x}(t, t_0, \hat{x}_{01}, \dots \hat{x}_{0n})$. Если возмущение начальных условий невелико, то в некоторой окрестности начальной точки траектории – движения тоже близки.

Справедлива *теорема о непрерывности решения по начальным условиям*. Пусть выполнены условия теоремы Коши. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon) > 0,\quad \left|x_{0k} - \hat{x}_{0k}\right| < \delta \quad \Rightarrow \left|x_k(t, t_0, \hat{x}_{01},\dots \hat{x}_{0n}) - x_k(t, t_0, x_{01},\dots x_{0n})\right| < \varepsilon$$

$$\textit{при}\ (k = 1,\dots n),\quad \left|t - t_0\right| < \hat{\delta}(\varepsilon)$$

Отсюда видно, что близость возмущенного и невозмущенного движений гарантируется *в некоторой временной окрестности, размер которой зависит от размеров трубки – окрестности («допуска») в фазовом пространстве координат.*

Однако в практике встречаются процессы, для которых надо гарантировать близость возмущенного и невозмущенного движений «вообще», при любом времени t > T (важно, чтобы существовало это некоторое T).

Например, запустив спутник на орбиту, полезно быть уверенным, что он не свалится нам на голову через 10 или 100 лет, а будет «вечно» находиться на орбите.

В наше время приходится сталкиваться с экологическими проблемами. Кто же знал, конструируя двигатель внутреннего сгорания, что через некоторое время использование этого открытия поставит под угрозу существование жизни на Земле?

Рассматривая близость возмущенного и невозмущенного движений «вообще», при любом времени t > T , мы приходим к определению **устойчивости движения по Ляпунову**.

Движение называется *устойчивым по Ляпунову,* если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon) > 0,\ \exists T : \left|x_{0k} - \hat{x}_{0k}\right| < \delta \quad \Rightarrow \left|x_k(t, t_0, \hat{x}_{01},\dots \hat{x}_{0n}) - x_k(t, t_0, x_{01},\dots x_{0n})\right| < \varepsilon$$

$$\textit{при}\ (k = 1,\dots n),\quad \forall t > T$$

Смысл определения в том, что для любого размера окрестности «допуска» (по фазовым координатам) невозмущенного движения существует размер окрестности, в которой можно «возмутить» начальные условия. Причем это возмущение приведет к тому, что возмущенное движение после некоторого момента времени T войдет в окрестность «допуска» и останется в этой окрестности при любом t > T.

Если движение устойчиво по Ляпунову и $\lim_{t\to\infty}\left|\vec{x}\left(t,\, t_0,\hat{\vec{x}}_0\right)-\vec{x}\left(t,\, t_0,\, \vec{x}_0\right)\right|=0$, то такое движение называется *асимптотически устойчивым.*

Если движение асимптотически устойчиво, то возмущенное движение с ростом времени стремится к невозмущенному.

Движение называется *неустойчивым по Ляпунову*, если

$$\exists\varepsilon>0\ \forall\ \delta(\varepsilon)>0,\ \ \exists T,\exists s\in[1,n]:\left|x_{0k}-\hat{x}_{0k}\right|<\delta\quad\Rightarrow$$

$$\left|x_s\left(t,\, t_0,\, \hat{x}_{01},\ldots\, \hat{x}_{0n}\right)-x_s\left(t,\, t_0,\, x_{01},\ldots\, x_{0n}\right)\right|\geq\varepsilon\ \textit{при}\ (k=1,\ldots\, n),\quad \forall t>T$$

Смысл этого определения в том, что как бы ни было мало возмущение начальных условий, все равно со временем хотя бы по одной координате возмущенное движение выйдет из некоторой окрестности «допуска» невозмущенного движения.

**Теорема.** *Задача об устойчивости движения может быть сведена к задаче об устойчивости тривиального (тождественно равного нулю) решения системы.*

Доказательство. Обозначим $\vec{z}=\vec{x}\left(t,\, t_0,\, \hat{\vec{x}}_0\right)-\vec{x}\left(t,\, t_0,\, \vec{x}_0\right)$. Тогда

$$\dot{\vec{z}}=\dot{\vec{x}}\left(t,\, t_0,\, \hat{\vec{x}}_0\right)-\dot{\vec{x}}\left(t,\, t_0,\, \vec{x}_0\right)=\vec{f}\left(t,\, \vec{x}\left(t,\, t_0,\, \hat{\vec{x}}_0\right)\right)-\vec{f}\left(t,\, \vec{x}\left(t,\, t_0,\, \vec{x}_0\right)\right)=$$
$$\vec{f}\left(t,\left(\vec{z}+\vec{x}\left(t,\, t_0,\, \vec{x}_0\right)\right)\right)-\vec{f}\left(t,\, \vec{x}\left(t,\, t_0,\, \vec{x}_0\right)\right).$$

При $\vec{z}(t)\equiv 0$ имеем $\dot{\vec{z}}(t)=0$, поэтому задача об устойчивости движения для исходной системы уравнений может быть заменена эквивалентной ей задачей об устойчивости тривиального решения для системы

$$\dot{\vec{z}}=\vec{f}\left(t,\left(\vec{z}+\vec{x}\left(t,\, t_0,\, \vec{x}_0\right)\right)\right)-\vec{f}\left(t,\, \vec{x}\left(t,\, t_0,\, \vec{x}_0\right)\right).$$

Поэтому обычно заранее делают указанную замену и исследуют задачу об устойчивости тривиального решения.

*Таким образом, задача об устойчивости движения может быть сведена для автономной системы к исследованию характера ее точки покоя* $\vec{x}=0$ (при рассмотрении свойств автономных систем было показано: если $\vec{x}=0$ - точка покоя, то $\vec{x}(t)\equiv 0$ - решение системы).

**Устойчивость по первому приближению.**

Будем рассматривать автономную систему $\dot{\vec{x}}=\vec{f}(\vec{x})$

и ее «систему первого приближения» $\dot{\vec{x}}=A\vec{x},\quad A=\dfrac{\partial\vec{f}}{\partial\vec{x}}\Big|_{\vec{x}=0}$

Заметим, что систему первого приближения можно строить, линеаризуя в окрестности нуля элементы матрицы, заменяя бесконечно малые элементы матрицы эквивалентными.

**Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению.**

Пусть 1) $f_k\left(x_1,\ldots\, x_n\right)$ непрерывны и непрерывно дифференцируемы по $x_1,\ldots\, x_n$,

2) $\left|f_k(x_1,\dots x_n)\right| \le \left(\sqrt{\sum_{s=1}^{n} x_s^2}\right)^{\alpha}$, $(\alpha > 0)$, $\quad k = 1,\dots n$.

Если все собственные числа матрицы А системы первого приближения имеют отрицательные действительные части, то тривиальное решение устойчиво.

Если хотя бы одно собственное число имеет положительную действительную часть , то тривиальное решение неустойчиво.

Пример. $\begin{cases} \dot{x} = \sin x + 1 - \cos^2 y \\ \dot{y} = x + \sin y \end{cases}$

Система первого приближения $\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = x + y, \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$|A - \lambda E| = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 1)^2 = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1$ Тривиальное решение неустойчиво.

Пример. $\begin{cases} \dot{x} = -\sin x + 1 - \cos^2 y \\ \dot{y} = x - \sin y \end{cases}$

Система первого приближения $\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = x - y, \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$|A - \lambda E| = \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda + 1)^2 = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = -1$ Тривиальное решение устойчиво.

Поскольку для автономных систем анализ устойчивости тривиального решения сводится к исследованию характера точки покоя, то зная поведение решений в окрестности различных точек покоя, мы выясним тем самым поведение траекторий систем.

**Классификация точек покоя для автономных систем второго и третьего порядков.**

**Система второго порядка.**

Запишем уравнение автономной системы второго порядка $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$

$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}$**.** Точка покоя $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$**.**

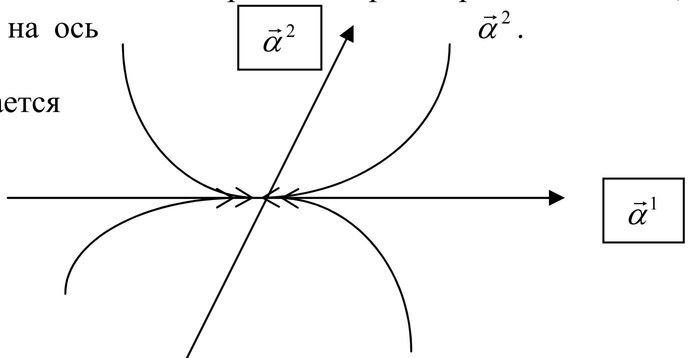
1. *Корни характеристического уравнения $\lambda_1, \lambda_2$ действительны..*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t} \vec{\alpha}^1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \vec{\alpha}^2$$

а) $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$.

При $t \to \infty \quad x(t) \to 0, y(t) \to 0$. Поэтому точка покоя (или тривиальное решение) асимптотически устойчива.

Заметим, что первое слагаемое – это проекция траектории на ось $\vec{\alpha}^1$, второе слагаемое – проекция на ось $\vec{\alpha}^2$.



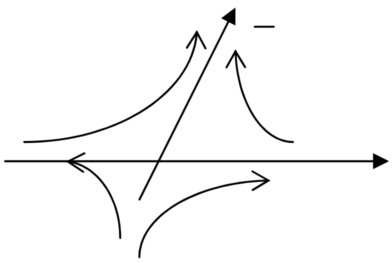

Такая точка покоя называется **устойчивый узел**.

б) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$.

Этот случай можно рассматривать как предыдущий, если формально положить t < 0. Получим те же траектории, что и в п. а), но стрелки на них будут направлены в другую сторону. Направление движение другое (t<0). Такая точка называется **неустойчивый узел**.

в) $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$.

По вектору $\overline{\alpha}^1$ мы, находясь на траектории, стремимся к нулю, по вектору $\vec{\alpha}^2$, наоборот, удаляемся от нуля.



Такая точка покоя - **седло.**

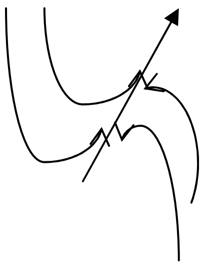
г) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$.

Это – тоже седло, но стрелки направлены в другую сторону.

Траектория прижимается к той оси, для которой модуль характеристического числа меньше.

*Седла – неустойчивые точки покоя.*

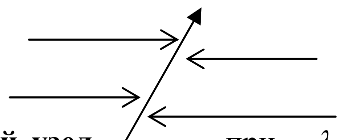
Заметим, в ситуациях узлов и седла траектория, начавшись в определенном квадранте, в нем и остается.



д) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.

Точка покоя – **дикритический узел**,

Устойчивый при $\lambda < 0$, неустойчивый при $\lambda > 0$



е) $\lambda_1 < 0, \quad \lambda_2 = 0$

Точка покоя - **вырожденный узел,** при $\lambda_1 < 0$ устойчивая, но не асимптотически устойчивая. Если $\lambda_1 > 0$, то точка покоя - неустойчивая (стрелки направлены в обратную сторону)

ж) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$. **Точка безразличного равновесия**. При изменении времени любая точка $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1\vec{\alpha}^1 + C_2\vec{\alpha}^2$ остается на месте. Этими точками заполнена вся плоскость.

2. *Корни характеристического уравнения комплексно сопряженные*.

$\lambda_{1,2} = \gamma \pm i\beta$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{\gamma t}\left[C_1\left(\vec{u}\cos\beta t - \vec{v}\sin\beta t\right) + C_2\left(\vec{u}\sin\beta t + \vec{v}\cos\beta t\right)\right]$$

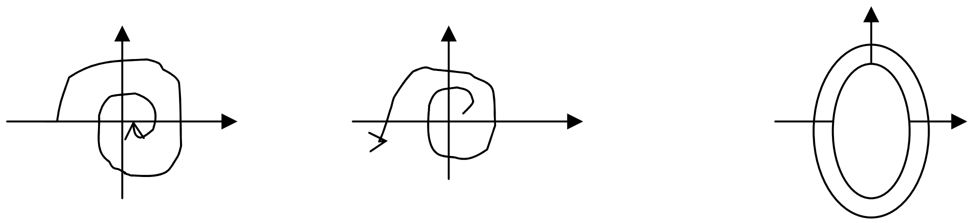
Параметр t имеет смысл угла поворота вокруг начала координат (в периодической составляющей).

а) Если $\gamma < 0$, то траектория приближается к началу координат с ростом t (спираль), так как $e^{\gamma t}$ - убывающая функция. Точка покоя **устойчивый фокус** асимптотически устойчива

б) если $\gamma > 0$, то траектория удаляется от начала координат с ростом t (спираль), так как $e^{\gamma t}$ - возрастающая функция. Точка покоя **неустойчивый фокус** неустойчива

в) если $\gamma = 0$, то траектории представляют собой эллипсы, охватывающие начало координат. Точка покоя **центр** устойчива, но не асимптотически устойчива.

а) б) в)



Пример. $\begin{cases} \dot{x} = x + \beta y \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

Классифицировать точки покоя в зависимости от параметра.

$|A - \lambda E| = \lambda^2 - 2\lambda + 1 - \beta$, $\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{\beta}$

1) $\beta > 0$

а) $\beta > 1$, $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ седло,

б) $\beta < 1$, $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ неустойчивый узел

в) $\beta = 1$, $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0$ вырожденный узел

2) $\beta < 0$ $\lambda_{1,2}$ - комплексно сопряженные.

Так как $\operatorname{Re}(\lambda_1) = \operatorname{Re}(\lambda_2) = 1 > 0$, то точка покоя – неустойчивый фокус

3) $\beta = 0$ $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, точка покоя – неустойчивый дикритический узел.

**Система третьего порядка.**

Запишем уравнение автономной системы третьего порядка $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

1) Все корни характеристического уравнения действительны и различны.

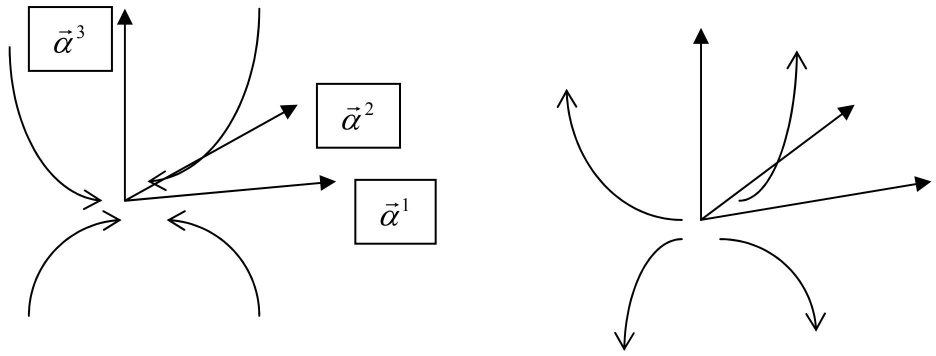
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t} \vec{\alpha}^1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \vec{\alpha}^2 + C_3 e^{\lambda_3 t} \vec{\alpha}^3.$$

Картину поведения фазовых траекторий довольно легко представить, рассматривая поведение фазовых траекторий в плоскостях, натянутых на пары собственных векторов. Этот случай уже изучен выше.

а) $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0$

В плоскостях $(\vec{\alpha}^1, \vec{\alpha}^2)$, $(\vec{\alpha}^1, \vec{\alpha}^3)$, $(\vec{\alpha}^2, \vec{\alpha}^3)$, имеем устойчивые узлы. Такая точка покоя так и называется – **устойчивый узел.**

б) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$ В плоскостях $(\vec{\alpha}^1, \vec{\alpha}^2)$, $(\vec{\alpha}^1, \vec{\alpha}^3)$, $(\vec{\alpha}^2, \vec{\alpha}^3)$, имеем неустойчивые узлы. Такая точка покоя называется – **неустойчивый узел.**

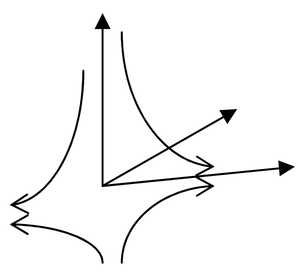


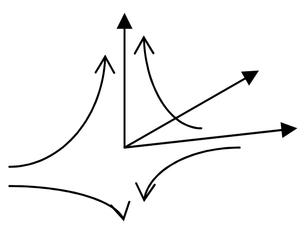

а) б)

в) один корень имеет знак, противоположный остальным двум корням. Точка покоя в этом случае называется **седло – узел** и является неустойчивой точкой покоя.

Пусть, например, $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0$. Тогда в плоскости $(\vec{\alpha}^1, \vec{\alpha}^2)$ имеем неустойчивый узел, а в плоскостях $(\vec{\alpha}^1, \vec{\alpha}^3)$, $(\vec{\alpha}^2, \vec{\alpha}^3)$ - седла. Если $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 > 0$, то в плоскости $(\vec{\alpha}^1, \vec{\alpha}^2)$ имеем устойчивый узел, а в плоскостях $(\vec{\alpha}^1, \vec{\alpha}^3)$, $(\vec{\alpha}^2, \vec{\alpha}^3)$ - седла.

$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0$. $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 > 0$





Заметим, что в ситуациях узлов и седла – узел траектория, начавшись в определенном октанте, не переходит в другой октант.

2) $\lambda_3$ - действительный корень характеристического уравнения, $\lambda_{1,2} = \gamma \pm i\beta$ - комплексно сопряженная пара корней.

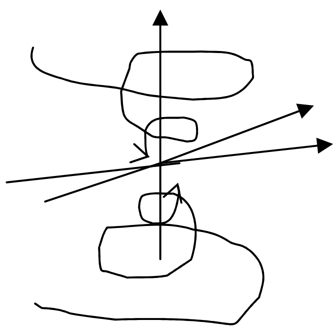
Заметим, что при изменении номера корней ситуация будет аналогичной.

В плоскости $\left(\vec{\alpha}^1, \vec{\alpha}^2\right)$ имеем фокус, устойчивый при $\gamma < 0$, неустойчивый при $\gamma > 0$.

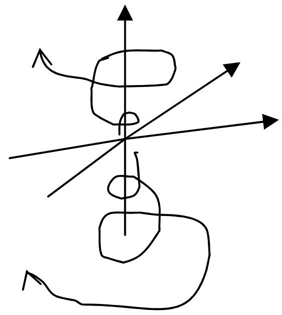
а) $\lambda_3 < 0$ $\gamma < 0$. Такая точка покоя называется **устойчивый фокус**.

б) $\lambda_3 > 0$ $\gamma > 0$. Такая точка покоя называется **неустойчивый фокус**.

$\lambda_3 < 0$ $\gamma < 0$



$\lambda_3 > 0$ $\gamma > 0$

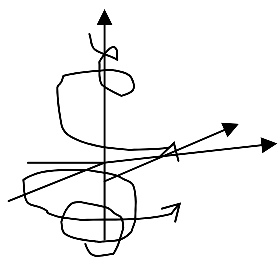


в) $\lambda_3 < 0$ $\gamma > 0$ или $\lambda_3 > 0$ $\gamma < 0$. Такая особая точка называется **седло – фокус** и является неустойчивой**.**

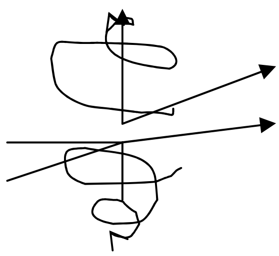
В первом случае по оси $\vec{\alpha}^3$ точка по траектории приближается к плоскости $\left(\vec{\alpha}^1, \vec{\alpha}^2\right)$ и уходит от начала координат, так как на самой плоскости имеем неустойчивый фокус.

Во втором случае на плоскости $\left(\vec{\alpha}^1, \vec{\alpha}^2\right)$ имеем устойчивый фокус, поэтому траектория стремится к оси $\vec{\alpha}^3$, но удаляется от начала координат по этой оси, так как $\lambda_3 > 0$.

$\lambda_3 < 0$ $\gamma > 0$



$\lambda_3 > 0$ $\gamma < 0$



**Функция Ляпунова, «вторая метода Ляпунова».**

Рассмотрим автономную систему $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}),\ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ и

функцию $V(x_1,\dots x_n)$.

Назовем эту функцию *знакоположительной,* если $V(x_1,\dots x_n) \ge 0$, *знакоотрицательной*, если $V(x_1,\dots x_n) \le 0$

Назовем функцию $V(x_1,\dots x_n)$ *положительно определенной,* если

1) она знакоположительна,
2) $V(x_1,\dots x_n) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0,\dots x_n = 0$

Назовем функцию $V(x_1,\dots x_n)$ *отрицательно определенной,* если

1) она знакоотрицательна,
2) $V(x_1,\dots x_n) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0,\dots x_n = 0$

Назовем функцию $V(x_1,\dots x_n)$ *знакоопределенной,* если она является отрицательно определенной или положительно определенной.

Введем *производную функции* $V(x_1,\dots x_n)$ *в силу системы* $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$: $\frac{dV}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_k} f_k$ . Заметим, что $\frac{dV}{dt} = \left(\overrightarrow{gradV}, \vec{f}\right)$. Поэтому, если $\frac{dV}{dt} < 0$, то угол между градиентом V и вектором правых частей системы тупой. Следовательно, убывание функции V соответствует движению по фазовым траекториям внутрь линии уровня $V(x_1,\dots x_n)$=*C*.

На этом основан **метод функций Ляпунова**. Этот метод сводится к трем теоремам Ляпунова.

**Теорема Ляпунова об устойчивости.** Пусть существует функция $V(x_1,\dots x_n)$ (функция Ляпунова), положительно определенная и имеющая знакоотрицательную $\frac{dV}{dt}$ в некоторой окрестности точки $\vec{x} = 0$.

Тогда тривиальное решение автономной системы $\vec{x}(t) \equiv 0$ устойчиво по Ляпунову.

**Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости.** Пусть существует функция $V(x_1,\dots x_n)$, положительно определенная и имеющая отрицательно определенную $\frac{dV}{dt}$ в некоторой окрестности точки $\vec{x} = 0$.

Тогда тривиальное решение автономной системы $\vec{x}(t) \equiv 0$ асимптотически устойчиво по Ляпунову.

**Теорема Ляпунова о неустойчивости.** Пусть $V(0) = 0$. Пусть $\frac{dV}{dt}$ знакоопределена в некоторой окрестности точки $\vec{x} = 0$. Если в любой окрестности точки $\vec{x} = 0$ найдутся такие точки, в которых знаки $V(x_1,\dots x_n)$ и $\frac{dV}{dt}$ совпадают, то тривиальное решение автономной системы неустойчиво.

Пример. $\begin{cases} \dot{x} = -x - y - x^3 - y^2 \\ \dot{y} = x - y + xy \end{cases}$

Выберем $V = x^2 + y^2$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} f_1 + \frac{\partial V}{\partial y} f_2 = 2x\left(-x - y - x^3 - y^2\right) + 2y\left(x - y + xy\right) = -2x^2\left(1 + x^2\right) - 2y^2$$

$V$ положительно определена, $\frac{dV}{dt}$ отрицательно определена. Поэтому тривиальное решение асимптотически устойчиво.

Пример. $\begin{cases} \dot{x} = y + x^3 \\ \dot{y} = -x + y^3 \end{cases}$

Выберем $V = x^2 + y^2$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} f_1 + \frac{\partial V}{\partial y} f_2 = 2x\left(y + x^3\right) + 2y\left(-x + y^3\right) = 2\left(x^4 + y^4\right)$$

$V$ и $\frac{dV}{dt}$ положительно определены, поэтому тривиальное решение неустойчиво.

## Лекция 25. Приближенное вычисление интеграла.

Часто нужно вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$, а аналитически это сделать невозможно (интеграл не берется) или слишком громоздко. Тогда применяют приближенные методы вычисления интеграла на отрезке, по которым пишут алгоритмы и программы реализации этих методов на ЭВМ. Численный расчет дает значение интеграла с некоторой погрешностью, которая зависит как от погрешности метода, так и от погрешности вычислений. Чаще всего рассматривают равномерную сетку, разбивая отрезок $[a, b]$ на отрезки длины шагом h: $x_n = x_0 + kh, \quad k = 0, 1, \ldots, n,\ a = x_0,\ b = x_n,\ n = \frac{b-a}{h}$ .

### 1. Формулы прямоугольников.

Обозначим $y_k = f(x_k)$. Заменим интеграл интегральной суммой, вычисляя площадь под графиком функции как сумму площадей прямоугольников с основанием h, высотами $y_k$.

Если на первом отрезке высоту прямоугольника можно выбрать как $y_0$, тогда на последнем отрезке высота прямоугольника $y_{n-1}$. Получим *первую формулу прямоугольников*

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(y_0 + \ldots + y_{n-1}\right).$$

Если на первом отрезке высоту прямоугольника можно выбрать как $y_1$, тогда на последнем отрезке высота прямоугольника $y_n$. Получим *вторую формулу прямоугольников*

$$\int_a^b f(x)dx \approx h(y_1 + ... + y_n).$$

Оценим погрешность формул прямоугольников. Разложим $f(x)$ в ряд Тейлора и оценим остаточный член.

Для первой формулы прямоугольников

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_0+kh}^{x_0+(k+1)h} (y_k + y'(\theta)h)dx \le h(y_0 + ... + y_{n-1}) + Mh^2 n = h(y_0 + ... + y_{n-1}) + M(b-a)h,$$

где $M = \max_{[a,\,b]} f'(x)$.

Для второй формулы прямоугольников

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_0+kh}^{x_0+(k+1)h} (y_{k+1} + y'(\theta)h)dx \le h(y_1 + ... + y_n) + Mh^2 n = h(y_1 + ... + y_n) + M(b-a)h,$$

где $M = \max_{[a,\,b]} f'(x)$.

Таким образом, обе формулы прямоугольников дают погрешность порядка h и являются формулами первого порядка точности.

Можно повысить точность формулы прямоугольников *за счет вычисления функции в серединах отрезков разбиения.* Получаем *третью формулу прямоугольников*

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) + ... + f\left(x_{n-1} + \frac{h}{2}\right)\right).$$

Оценим погрешность этой формулы.

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_0+kh}^{x_0+(k+1)h} \left(f\left(x_k + \frac{h}{2}\right) + f'\left(x_k + \frac{h}{2}\right)\left(x - x_k - \frac{h}{2}\right) + \frac{1}{2} f''(\theta)\left(x - x_k - \frac{h}{2}\right)^2\right)dx \le$$

$$h\left(f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) + ... + f\left(x_{n-1} + \frac{h}{2}\right)\right) +$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1} f'\left(x_k + \frac{h}{2}\right)\frac{1}{2}\left(x - x_k - \frac{h}{2}\right)^2 \Big|_{x_0+kh}^{x_0+(k+1)h} + \frac{1}{2} f''(\theta)\frac{1}{3}\left(x - x_k - \frac{h}{2}\right)^3 \Big|_{x_0+kh}^{x_0+(k+1)h} \le$$

$$h\left(f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) + ... + f\left(x_{n-1} + \frac{h}{2}\right)\right) + 0 + \frac{M_2}{24}(b-a)h^2$$

Таким образом, погрешность третьей формулы прямоугольников не превышает $\frac{M_2}{24}(b-a)h^2$, где $M_2 = \max_{[a,b]} f''(x)$. Эта формула прямоугольников имеет второй порядок точности.

2. **Формула трапеций.**

Сложим первую и вторую формулы прямоугольников и разделим пополам. Получим *формулу трапеций*

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + ... + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right)$$

Поясним название формулы. Приблизим площадь под графиком функции на отрезке $[kh, (k+1)h]$ площадью трапеции $\frac{1}{2}(y_k + y_{k+1})$. Суммируя площади по всему отрезку интегрирования, получим

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}(y_0 + y_1 + y_1 + y_2 + y_2 + ... + y_{n-2} + y_{n-1} + y_{n-1} + y_n) =$$

$$h\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + ... + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right)$$

*Аппроксимируем функцию кусочно – линейной функцией*, значения которой совпадают с значениями функции в точках разбиения. Площадь под графиком кусочно – линейной функции на отрезке $[kh, (k+1)h]$ составит

$y_k h + \frac{1}{2}(y_{k+1} - y_k)h = \frac{1}{2}(y_k + y_{k+1})$. Суммируя площади по всему отрезку интегрирования, получим вновь формулу трапеций.

Можно показать, что формула трапеций – формула второго порядка точности. Погрешность вычисления интеграла с помощью этой формулы (это можно показать) не превышает $\frac{M_2}{12}(b-a)h^2$, т.е. в два раза больше, чем по третьей формуле прямоугольников.

### 3. Формула Симпсона.

Аппроксимируем функцию $f(x)$ на отрезке разбиения квадратичной функцией $f_q = ax^2 + bx + c$ так, чтобы

$$f(kh) = f_q(kh),\ f((k+1)h) = f_q((k+1)h),\ f((k+2)h) = f_q((k+2)h),\ k = 0, 2, ...$$

*Лемма.* $\int_u^v (ax^2 + bx + c)dx = \frac{u-v}{6}\left[f_q(u) + 4f_q(\frac{u+v}{2}) + f_q(v)\right]$.

Докажем лемму для $u = kh, v = (k+2)h$. Сделаем замену $z = x - (k+1)h$.
Тогда формула сведется к следующей:

$$\int_{-h}^{h} (ax^2 + bx + c)dx = \frac{h}{3}\left[f_q(-h) + 4f_q(0) + f_q(h)\right].$$

Левая часть $\int_{-h}^{h} (ax^2 + bx + c)dx = \frac{1}{3}ax^3 \,|_{-h}^{h} + \frac{1}{2}bx^2 \,|_{-h}^{h} + 2ch = \frac{2}{3}ah^3 + 2ch$

Правая часть $\frac{h}{3}\left[ah^2 - bh + c + 4c + ah^2 + bh + c\right] = \frac{2}{3}ah^3 + 2ch$. Лемма доказана.

Разобьем теперь отрезок интегрирования $[a, b]$ на 2n частей, ($h = \frac{b-a}{2n}$). Применим лемму к отрезкам $[x_0, x_0 + 2h]$, $[x_0 + 2h, x_0 + 4h]$,..., получим *формулу Симпсона*

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[y_0 + 4y_1 + y_2 + y_2 + 4y_3 + y_4 + ...y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}\right] =$$

$$\frac{h}{3}\left[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + ... + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}\right].$$

Можно показать, что формула Симпсона – *формула четвертого порядка точности*, ее погрешность не превосходит $\frac{M_4(b-a)}{180}h^4$, где $M_4 = \max_{[a,b]} f^{(IV)}(x)$. Это означает, что при интегрировании многочлена третьей степени формула Симпсона точна, ее погрешность равна нулю.

**Пример**. Вычислить приближенно $I = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$ с шагом $h = \frac{1}{4}$.

1 формула прямоугольников $I = \frac{1}{4}\left(0 + \frac{1}{64} + \frac{1}{8} + \frac{27}{64}\right) = 0.14, \quad \varepsilon = 0.11$,

2 формула прямоугольников $I = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{64} + \frac{1}{8} + \frac{27}{64} + 1\right) = 0.39, \quad \varepsilon = 0.14$,

3 формула прямоугольников $I = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{216} + \frac{27}{216} + \frac{125}{216} + \frac{343}{216}\right) = 0.242, \varepsilon = 0.008$,

Формула трапеций $I = \frac{1}{2}(0.14 + 0.39) = 0.265, \quad \varepsilon = 0.115$.

Формула Симпсона $I = \frac{1}{12}\left(0 + \frac{4}{64} + \frac{2}{8} + \frac{4 \cdot 27}{64} + 1\right) = 0.25, \quad \varepsilon = 0$

## Лекция 26. Обзор численных методов решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Будем рассматривать схемы численных методов для уравнения первого порядка

$$y' = f(x, y),\ y(x_0) = y_0.$$

Это – самый простой случай, но к нему по аналогии сводятся схемы методов для системы дифференциальных уравнений и для дифференциального уравнения n- го порядка.

### 1. Методы, основанные на разложении функции в ряд Тейлора.

Запишем разложение функции в ряд Тейлора в окрестности точки $\hat{x}$

$$y(x) = y(\hat{x}) + y'(\hat{x})(x - \hat{x}) + y''(\hat{x})\frac{(x-\hat{x})^2}{2!} + ...$$

Рассмотрим равномерную сетку по $x: a = x_0,\ x_0 + h,\ x_0 + 2h, ...\ x_0 + nh, ...$

Пусть $\hat{x} = x_n,\ x = x_{n+1},\ x_{n+1} - x_n = h$, тогда разложение функции в ряд Тейлора можно записать в виде

$$y_{n+1} = y_n + h\left(y'(x_n) + y''(x_n)\frac{h}{2} + ...\right) = y_n + h\Delta(x_n, y_n, h),$$ где

$$\Delta(x_n, y_n, h) = y'(x_n) + y''(x_n)\frac{h}{2} + ...$$

Подставим в $\Delta(x_n, y_n, h)$ из дифференциального уравнения

$$y'(x_n) = f(x_n, y_n), \quad y''(x_n) = \left(f(x, y)\right)'\Big|_{(x_n,\, y_n)} = f_x'(x_n, y_n) + f_y'(x_n, y_n)y'(x_n, y_n) =$$
$$f_x'(x_n, y_n) + f_y'(x_n, y_n)f(x_n, y_n)$$

Тогда $\Delta(x_n, y_n, h) \approx \varphi(x_n, y_n, h) = f(x_n, y_n) + \frac{h}{2}(f_x'(x_n, y_n) + f_y'(x_n, y_n)f(x_n, y_n))$

$$y_{n+1} = y_n + h\varphi(x_n, y_n, h).$$

*Это – основная расчетная формула.*

Учитывая в $\varphi(x_n, y_n, h)$ слагаемые с производными высших порядков, получим более точные приближенные формулы.

Если взять $\varphi(x_n, y_n, h) = f(x_n, y_n)$, то получим **метод Эйлера**

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

## 2. Методы Рунге – Кутта.

Основная идея методов Рунге – Кутта – вместо вычисления производных высших порядков в $\varphi(x_n, y_n, h)$ вычислять значения функции в некоторых точках, отличных от $x_n$.

Выберем

$$\varphi(x_n, y_n, h) = c_1 f(x, y) + c_2 f(x + ha_2, y + hb_{21} f(x, y))$$

Разложим $\varphi(x_n, y_n, h)$ по h

$$\varphi(x_n, y_n, h) = c_1 f(x, y) + c_2 f(x, y) + c_2 f_x'(x, y)\, ha_2 + c_2 f_y'(x, y) hb_{21} f(x, y) + ... =$$
$$(c_1 + c_2) f(x, y) + hc_2\left(f_x'(x, y)a_2 + f_y'(x, y) f(x, y) b_{21}\right) + ...$$

Сравним с приведенной выше основной расчетной формулой

$$\Delta(x_n, y_n, h) \approx \varphi(x_n, y_n, h) = f(x_n, y_n) + \frac{h}{2}(f_x'(x_n, y_n) + f_y'(x_n, y_n)f(x_n, y_n))$$
$$y_{n+1} = y_n + h\varphi(x_n, y_n, h).$$

и определим коэффициенты $c_1, c_2, a_2, b_{21}$

$$c_1 + c_2 = 1, \; c_2 a_2 = \frac{1}{2}, \quad c_2 b_{21} = \frac{1}{2}.$$

Пусть $c_2 = \alpha$, тогда $c_1 = 1 - \alpha, \quad a_2 = \frac{1}{2\alpha}, \quad b_{21} = \frac{1}{2\alpha}$.

Если $\alpha = \frac{1}{2}, \quad то \quad c_1 = c_2 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = b_{21} = 1$. Тогда

$$\varphi(x_n, y_n, h) = \frac{1}{2}\left(f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n))\right).$$

$$y_{n+1} = y_n + h\varphi(x_n, y_n, h) = y_n + \frac{h}{2}\left(f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n))\right).$$

Это – **метод Хойна.**

Если в формуле $y_{n+1} = y_n + h\varphi(x_n, y_n, h)$. выбрать

$$\varphi(x, y, h) = \sum_{r=1}^{m} c_r k_r, \quad k_1 = f(x, y), k_r = f\left(x + ha_r, y + h\sum_{s=1}^{r-1} b_{rs}k_s\right), r = 2,3...n,$$

то получим **явный m – шаговый (m – точечный) метод Рунге – Кутта.**

Наиболее распространен **явный четырехточечный метод Рунге – Кутта**

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f(x_n, y_n), k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right),$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right), k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3)$$

В явных методах Рунге – Кутта значения $k_r$ вычисляются только по предыдущим значениям $k_1, ...k_{r-1}$.

В *неявных методах Рунге – Кутта* значения $k_r$ вычисляются как по предыдущим $k_1, ...k_{r-1}$, так и по последующим значениям $k_{r+1}, ...k_m$. Поэтому в этих методах приходится еще решать систему уравнений относительно $k_r$.

**Неявный m – шаговый метод Рунге – Кутта** можно записать в виде

$$y_{n+1} = y_n + h\varphi(x_n, y_n, h).$$

$$\varphi(x, y, h) = \sum_{r=1}^{m} c_r k_r, \quad k_r = f\left(x + ha_r, y + h\sum_{s=1}^{m} b_{rs}k_s\right), r = 1,2,3...m,$$

### 3. Методы Адамса.

Идея методов Адамса – использовать не промежуточные вычисления значений правой части дифференциального уравнения внутри отрезка $[x_n, x_{n+1}]$, а значения правой части на предыдущих шагах (сделать метод методом «с памятью»).

В формуле $y(x+\mu) - y(x) = \int_{x}^{x+\mu} f(x, y)dx$ заменим $f(x, y)$ интерполяционным полиномом Ньютона $P(x)$.

**Явные методы Адамса (Адамса – Башфорта).**

Возьмем $x = x_n$ $\mu = h$, но интеграл будем брать по предыдущему отрезку $[x_{n-1}, x_n]$. Тогда

$$y_{n+1} - y_n = \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x, y)dx = \int_{x_{n-1}}^{x_n} P(x)dx \approx h\sum_{r=0}^{k} \gamma_r^n \nabla^r f_n$$

Здесь $\nabla^r f_n$ - конечная разность $r$ - го порядка:

$$\left(\nabla^0 f_n = f_n, \nabla^1 f_n = f_n - f_{n-1}, \nabla^2 f_n = \nabla^1 f_n - \nabla^1 f_{n-1} ...\right)$$

Подставляя эти разности, получим

$$y_{n+1}-y_n=h\sum_{r=0}^{k}\beta_{kr}f_{n-r} \quad (k-\textit{шаговый явный метод Адамса – Башфорта})$$

Пример.

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x,y)dx \approx \frac{h}{2}(f_{n-1}+f_n)=hf_{n-1}+\frac{h}{2}(f_n-f_{n-1})\approx hf_n+\frac{h}{2}(f_n-f_{n-1})=\frac{h}{2}(3f_n-f_{n-1})$$

Получен **явный метод Адамса – Башфорта второго порядка (**двухшаговый**)**

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}(3f_n-f_{n-1}).$$

Более точен метод **Адамса – Башфорта четвертого порядка:**

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{24}(55f_n-59f_{n-1}+37f_{n-2}-9f_{n-3})$$

Заметим, если $y_0$ задано (в задаче Коши начальное условие задается), то для того, чтобы начал работать метод Адамса 4 порядка, нужно вычислить еще значения (каким-либо другим методом) $y_1, y_2, y_3$. Тогда из системы формул Адамса Башфорта, выписанных для $y_1, y_2, y_3, y_4$, вычисляются значения правых частей $f_0, f_1, f_2, f_3$, необходимые для того, чтобы метод начал работать. Затем уже по этим значениям по формуле метода определяются $y_{5,}\dots$.

Эта процедура называется «разгоном метода» и является обязательной в методах Адамса.

**Неявные методы Адамса (Адамса – Мултона).**

Возьмем $x=x_n\ \mu=h$, интеграл будем брать по отрезку $[x_n, x_{n+1}]$. Тогда

$$y_{n+1}-y_n=\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y)dx=\int_{x_n}^{x_{n+1}} P(x)dx\approx h\sum_{r=0}^{k}\gamma_r^n\nabla^r f_n=h\sum_{r=0}^{k}\beta_{kr}f_{n-r}$$

Здесь $\nabla^r f_n$ - конечная разность $r$ - го порядка:

$$\left(\nabla^0 f_n=f_n, \nabla^1 f_n=f_n-f_{n-1}, \nabla^2 f_n=\nabla^1 f_n-\nabla^1 f_{n-1}\dots\right)$$

Подставляя эти разности, получим

$$y_{n+1}-y_n=h\sum_{r=0}^{k}\beta_{kr}f_{n-r} \quad (k-\textit{шаговый явный метод Адамса –Мултона})$$

Формально он записан в том же виде, что и метод Адамса – Башфорта, но разница существенна: в методе Адамса – Мултона в левой части уравнения присутствует $y_{n+1}$, а в правой части присутствует $f_{n+1}$. Поэтому приходится еще решать систему уравнений для явного определения $y_{n+1}$.

Пример. $\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y)dx \approx \frac{h}{2}(f_n+f_{n+1})$. Поэтому имеем формулу

$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}(f_n+f_{n+1})$ **метода Адамса – Мултона второго порядка**.

Более точен **метод Адамса – Мултона четвертого порядка**

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{24}(9f_{n+1}+19f_n-5f_{n=1}+f_{n-2}).$$

Эти методы также требуют разгона.

Обобщением методов Адамса являются **линейные многошаговые методы**

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j} = h\sum_{j=0}^{k} \beta_j f_{n+j}, \quad n = 0,1...$$

Если $\beta_k = 0$, то метод – явный, если $\beta_k \neq 0$, то метод – неявный.

Есть методы, сочетающие явные и неявные этапы – методы. Таковы, например, методы типа **предиктор – корректор** (предиктор P – предсказатель – явный метод, корректор C – неявный метод). Эти методы содержат обычно и этапы вычисления функции E. Распространены методы PECE и PEC.

Рассмотрим в качестве метода P метод Адамса – Башфорта 2 го порядка, а в качестве метода C – метод Адамса – Мултона 2 го порядка.

Схема метода может быть записана в виде.

P $\quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(3f_n - f_{n-1})$.

E $\quad f_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1})$

C $\quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f_n + f_{n+1})$

E $\quad f_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1})$

Метод P «предсказывает», прогнозирует $y_{n+1}$, вычисляется значение правой части, которое используется в методе C – «корректоре» для коррекции приближения $y_{n+1}$, затем вычисляется более точное значение правой части, которое вновь используется в методе P.

## Сходимость, устойчивость разностных схем, порядок точности методов.

Вообще-то это – тема отдельного курса, но нельзя говорить о методах решения дифференциальных уравнений и не сказать хотя бы несколько слов о сходимости численных алгоритмов, устойчивости вычислительных схем и точности методов.

Рассмотрим дифференциальное уравнение $\{\ y' = f(x, y)$, равномерную сетку на отрезке интегрирования $[a, b]$: $\quad x_0 = a, x_1 = a + h,... x_n = a + nh,...b$ .

Рассмотрим сеточную функцию $f^{(h)}$- правую часть уравнения, определенную на сетке $f(x_k, y_k), \quad k = 1,...n, \quad y_k = y(x_k)$.

Введем аппроксимации производной:

$$y'_{k+} = \frac{1}{h}(y_{k+1} - y_k), \quad y'_{k-} = \frac{1}{h}(y_k - y_{k-1}), \quad y'_{k0} = \frac{1}{2h}(y_{k+1} - y_{k-1}).$$

Задача Коши (дифференциальная задача) $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ заменяется **разностной задачей (разностной схемой)** $\begin{cases} L(y) = f \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

или $L_h y^{(h)} = f^{(h)}$.

Разностная схема отличается от дифференциального уравнения тем, что функции заменены сеточными, производные заменены их аппроксимациями.

$y^{(h)}$ - решение разностной задачи, $y$ - решение дифференциальной задачи, $[y]_h$ - сеточная функция, построенная по $y$.

**Сходимость разностной схемы с порядком $h^k$.**

Решение $y^{(h)}$ сходится к $y$ с порядком $h^k$, если $\left\|[y]_h - y^{(h)}\right\| \le Ch^k$, .

$\left(C > 0,\, k > 0,\, \|\cdot\| = \max_i [\cdot]\right)$.

**Аппроксимация с порядком $h^k$.**

Пусть задача $L_h y^{(h)} = f^{(h)}$ имеет единственное решение.

Пусть $L_h[y]_h = f^{(h)} + \delta f^{(h)}$ ($\delta f^{(h)}$ - невязка).

Разностная задача аппроксимирует дифференциальную задачу на решении $y$ с порядком $h^k$, если $\left\|\delta f^{(h)}\right\| = \max_h \left[\delta f^{(h)}\right] \le C_1 h^k$.

Пример. Рассмотрим схему Эйлера для задачи $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$.

Разностная задача $\dfrac{y_{n+1} - y_n}{h} = f(x_n, y_n)$, $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$,

$\dfrac{y_{n+1} - y_n}{h} = y'(x_n) + o(h)$. Поэтому

$L_h[y]_h = \dfrac{y_{n+1} - y_n}{h} = y'(x_n) + o(h) = f^{(h)}(x_n) + o(h)$. То есть, $\delta f^{(n)} = o(h)$, следовательно, схема Эйлера дает аппроксимацию первого порядка.

*Замечание.* Ошибку аппроксимации $\tau$ можно оценить по **правилу Рунге**, решая дифференциальное уравнение с шагом $h$, а затем с шагом $\dfrac{h}{2}$ и сравнивая решения: $\tau = \dfrac{\left[y^{(h)} - y^{(h/2)}\right]}{\left[y^{(h/2)} - y^{(h/4)}\right]} \approx 2^p$, где $p$ - порядок аппроксимации.

**Устойчивость разностной схемы.**

Разностная схема называется *устойчивой,* если $\exists h_0, \delta > 0,$ *что для* $\forall h < h_0, \forall \left\|\varepsilon^{(h)}\right\| < \delta$ разностная задача $L_h z^{(h)} = f^{(h)} + \varepsilon^{(h)}$ имеет единственное решение $z^{(h)}$ такое, что $\left\|z^{(h)} - y^{(h)}\right\| \le C\left\|\varepsilon^{(h)}\right\|$.

Другими словами, при малых возмущениях $f^{(h)}$ мало возмущается $y^{(h)}$.

**Теорема.** Пусть разностная схема аппроксимирует дифференциальную задачу на решении $y$ с порядком $h^k$ и устойчива. Тогда решение разностной задачи сходится к $y$ с порядком $h^k$, причем $\left\|[y]_h - y^{(h)}\right\| \le CC_1 h^k$. Здесь $C_1$ - константа аппроксимации, C – константа устойчивости.

Доказательство. Пусть $\varepsilon^{(h)} = \delta f^{(h)}$, тогда по единственности решения (определение устойчивости) и определению аппроксимации $[y]_h = z^{(h)}$. Тогда

$$\left\| [y]_h - y^{(h)} \right\| \le C \left\| \varepsilon^{(h)} \right\| = C \left\| \delta f^{(h)} \right\| \le C C_1 h^k \quad (\text{при } \varepsilon^{(h)} = \delta f^{(h)} \text{ имеем } z^{(h)} = [y]_h).$$

## Содержание.