

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МОСКОВСКИЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(технический университет)

М.В. Капранов, А.И. Томашевский

**АНАЛИЗ ФАЗОВЫХ ТРАЕКТОРИЙ
В ОКРЕСТНОСТЯХ ОСОБЫХ ТОЧЕК
2-D и 3-D НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Учебное пособие по курсу «Теория колебаний»
для студентов, обучающихся по направлениям
552500 и 654200 «Радиотехника»

Москва

Издательство МЭИ

2003

УДК
621.38
К 901
УДК 621.38.001.63 (075.8)

Утверждено учебным управлением МЭИ в качестве учебного пособия

Подготовлено на кафедре формирования колебаний и сигналов

Рецензенты к-т техн. наук, проф. А. К. Нарышкин,
д-р техн. наук, проф. Б. И. Шахтарин (МГТУ им. Н.Э. Баумана)

Капранов М.В., Томашевский А.И.

Анализ фазовых траекторий в окрестностях особых точек 2-D и 3-D
нелинейных динамических систем: Учебное пособие по курсу «Теория
колебаний» – М.: Издательство МЭИ, 2003. – 88 с.

ISBN

Излагается фундаментальный для теории колебаний аппарат исследования поведения нелинейных динамических систем в двумерном (2-D) и трехмерном (3-D) фазовом пространстве, линеаризованных в малых окрестностях состояний равновесия. Приводится классификация 2-D и 3-D особых точек по типу фазовых траекторий (фазовых портретов) в их окрестностях.

Пособие предназначено для студентов старших курсов, обучающихся по направлениям 552500 и 654200 «Радиотехника».

ISBN – – –

Московский энергетический институт, 2003

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	4
1. Основные понятия теории нелинейных систем.....	5
2. Исходные соотношения.....	12
3. Общие решения уравнений движения, линеаризованных в малой окрестности состояния равновесия	16
4. Выражения фазовых траекторий в главных координатах.....	24
5. Фазовые траектории 2–мерного пространства	27
6. Обратная задача для поля фазовых траекторий на плоскости.....	52
7. Обратная задача для вырожденного случая.....	55
8. Фазовые траектории в окрестностях особых точек 3–мерного пространства	61
Примечания.....	72
Задачи для самостоятельного решения.....	76
Библиографический список	79

ВВЕДЕНИЕ

Цель данного пособия – провести детальное, по возможности простое и доступное «неискушенному» читателю, изложение некоторых основных разделов курса «Теория колебаний», связанных с описанием характера фазовых траекторий в окрестности состояний равновесия автономных нелинейных динамических систем с одной и полутора степенями свободы.

Вначале очень кратко напоминаются основные положения общей теории систем и формулируются причины, по которым в современной теории колебаний уделяется такое большое внимание качественным (топологическим) методам исследования нелинейных динамических систем. Обсуждается общая идея перехода от анализа временных решений исходных нелинейных дифференциальных уравнений к исследованию траекторий в фазовом пространстве системы.

Затем подробно выводятся аналитические выражения для общих решений линейной модели системы во временной области, устанавливаются соотношения между корнями характеристического уравнения и коэффициентами распределения и дается вывод выражений фазовых траекторий. Для облегчения усвоения процедуры исключения времени из общих решений, она на первом этапе подробно демонстрируется в деталях для частного, более наглядного случая системы с одной степенью свободы и приводится полная классификация типов траекторий в 2–мерном фазовом пространстве.

После этого, с использованием полученных понятий и аппарата фазовой плоскости, дается переход к сложным конструкциям траекторий 3–мерного пространства.

Предполагается, что читатель имеет лишь некоторое, весьма общее представление о задачах и содержании учебного курса «Теория колебаний».

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Напомним некоторые основные положения и определения теории нелинейных динамических систем.

Под *системой* в самом общем смысле понимают совокупность абстрактных, математических или иных объектов различной физической природы, взаимодействующих между собой по определенным законам.

Исходным понятием является «состояние» системы, т.е. набор из N значений $x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)$ конечного числа эволюционирующих во времени величин, которые по условиям задачи полностью характеризуют исследуемое явление в момент времени t . Для компактности математических записей иногда вводят N -компонентный вектор состояния $X(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)]^T$.

Любая система должна иметь *описание* в той или иной форме (иногда даже в словесной). *Динамической* называют систему, развивающуюся во времени t и имеющую (по терминологии Ю.И.Неймарка [7]) *полное описание*. Под *полным* понимают вовсе не абсолютно точное, учитывающее все детали явления, а всего лишь такое описание, которое позволяет с помощью некоторого, заданного нами преобразования $F[X(t)]$ по состоянию $X(t)$ в момент t однозначно и полностью определить состояние $X(t_1)$ в момент t_1

$$X(t_1) = F[X(t)]. \quad (1.1)$$

В самом общем виде при желании под динамической системой можно понимать любой процесс или преобразование.

Для систем, наблюдаемых во времени непрерывно (*системы с непрерывным временем*), полное описание дает состояние $X(t+dt)$ в момент $t+dt$ через состояние $X(t)$ при произвольно малых приращениях времени $dt \rightarrow 0$

$$X(t+dt) = F[X(t)]. \quad (1.2)$$

Если имеем дело с динамической системой, наблюдаемой лишь в эквидистантные дискретные моменты времени nT , где T – интервал дискретизации, $n = 0, 1, 2, \dots$, то в простейшем случае полное описание определяет состояние $X(n+1)$ в дискретный момент безразмерного времени $(n+1)$ по состоянию $X(n)$ в безразмерный момент n

$$X(n+1) = F[X(n)]. \quad (1.3)$$

Возможны и более сложные описания, например

$$X(n+1) = F[X(n), X(n-1), \dots].$$

Во всех этих записях предполагается, что в преобразование $F[X(t)]$ или $F[X(n)]$ в том или ином виде косвенно входят физические параметры рассматриваемой системы $a = [a_1, a_2, \dots, a_m]^T$. Кроме того, оно не содержит явной зависимости от времени t – такие динамические системы называют стационарными или автономными (в противном случае имеем дело с нестационарными или неавтономными системами). Если один или несколько параметров меняются во времени по известному закону, то систему называют *параметрической* (правильнее говорить – с переменными во времени параметрами).

Очевидно, что процессы в нестационарных системах или системах с переменными параметрами намного сложнее процессов в стационарных системах с фиксированными параметрами при одном и том же виде преобразования F . Здесь мы рассмотрим лишь автономные системы с постоянными во времени и сосредоточенными в пространстве параметрами (элементы теории систем с распределенными параметрами можно найти в разделах курса “Теория колебаний”, посвященных символическому методу составления дифференциальных уравнений [5]).

Исходным математическим объектом теории динамических систем с непрерывным временем является совокупность (в математике обычно говорят *система*) дифференциальных уравнений — обыкновенных для объектов с сосредоточенными параметрами или в частных производных для объектов с распределенными параметрами (*полевые* динамические системы). Объектом теории динамических систем с дискретным временем являются разностные уравнения или уравнения с запаздывающим аргументом, здесь их рассматривать мы не будем.

В общем виде дифференциальные уравнения, описывающие эволюцию во времени t автономной нелинейной динамической системы (НДС) с фиксированными параметрами, удобно представить в форме Коши, т.е. как систему N обыкновенных уравнений 1-го порядка:

$$dX(t)/dt = F[X(t), a], \quad t = 0 : X(0) = X_{\text{нач}}. \quad (1.4)$$

В этой записи F – нелинейная вектор-функция размерности N , а кроме вектора состояния $X(t) = [x_1(t), \dots, x_N(t)]^T$ в текущий момент времени t и вектора параметров $a = [a_1, \dots, a_m]$ показано также и состояние системы $X(0)$ в начальный момент времени $t = 0$.

Указывая в записи (1.4) начальное состояние $X(0)$, мы подчеркиваем тот факт, что в существенно нелинейной динамической системе (нелинейность скрыта в конкретном выражении вектор-функции F) сам вид решения $X(t)$ может кардинальным образом, качественно изменяться при изменении начальных условий $X(0)$. Аналогичным образом, указав в правых частях уравнений (1.4) вектор параметров a , мы напоминаем о возможной смене вида решений $X(t)$ при переходе какого-либо из параметров a_i через некоторое граничное значение $a_{гр}$. Эту смену (или ветвление) решений называют *бифуркацией* (от английского *furcation* – раздвоение, разветвление), а величину $a_{гр}$ – бифуркационным значением параметра a_i .

Для целей данного пособия ограничим далее число уравнений в (1.4) значением $N = 3$, т.е. рассмотрим случай трехмерной (*3-dimension* или *3-D*) автономной нелинейной динамической системы. Взамен векторной записи представим ее описание в виде системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка (здесь мы взамен использования индексов при нумерации переменных x_1 , x_2 и x_3 переходим для простоты и большей наглядности к различным буквенным их обозначениям):

$$du/dt = f_1(u, v, w), \quad (1.5, a)$$

$$dv/dt = f_2(u, v, w), \quad (1.5, б)$$

$$dw/dt = f_3(u, v, w). \quad (1.5, в)$$

Считаем известными начальные условия – полагаем, что при $t = 0$ заданы величины $u(0) = u_{нач}$, $v(0) = v_{нач}$, $w(0) = w_{нач}$. Для сокращения места запись параметров в правых частях уравнений эволюции (1.5,а) – (1.5,в) также опущена.

В этих уравнениях символами $u(t)$, $v(t)$, $w(t)$ обозначены динамические переменные (т.е. компоненты «вектора состояния» НДС), а $f_1(u, v, w)$, $f_2(u, v, w)$ и $f_3(u, v, w)$ – некоторые известные нам по условиям задачи нелинейные функции динамических переменных.

Так называемая задача Коши заключается в отыскании по уравнениям (1.5,а)–(1.5,в) и начальным условиям $u(0) = u_{нач}$, $v(0) = v_{нач}$, $w(0) = w_{нач}$ текущих значений динамических переменных $u(t)$, $v(t)$, $w(t)$ в произвольный момент времени t . Однако, аналитического решения этой задачи в трехмерном случае для произвольных нелинейных функций $f_1(u, v, w)$, $f_2(u, v, w)$ и $f_3(u, v, w)$ не существует. Что касается получения решений $u(t)$, $v(t)$, $w(t)$ численными методами, то, несмотря на всю мощь современных компьютеров, такой вариант анализа свойств решений системы неудобен. Действительно, для того чтобы получить достаточное представление о поведении системы из наблюдения за ее *временными решениями* $u(t)$, $v(t)$, $w(t)$, нужно не только перебрать огромное количество их реализаций, отличающихся начальными условиями, но и суметь установить, как повлияет изменение параметров в правых частях (1.5,а)–(1.5,в) на это поведение. Эта

задача практически невыполнима – поскольку в нелинейных системах сам вид временного решения может резко меняться при весьма незначительных изменениях начальных условий или параметров, то приходится перебирать чрезвычайно много значений начальных условий в требуемом диапазоне изменения параметров.

На основании такого рода ограничений иногда говорят даже о «проклятии размерности» (по терминологии крупнейшего американского математика Ричарда Беллмана), преследующем современную математику в задачах динамики нелинейных систем высокой размерности.

Более того, с формальной точки зрения, казалось бы, что уравнения эволюции (1.5,а)–(15,б) в принципе позволяют по заданному состоянию системы в момент времени t_0 найти ее состояние в любой момент $t > t_0$ с необходимой для практики точностью. Однако для реального отыскания текущего состояния в момент t нужна достаточная точность задания начального состояния в момент t_0 . В случае линейных систем относительная погрешность результата такая же, как и относительная погрешность задания начального состояния, чем и обусловлена убежденность в незыблемости «Лапласовского детерминизма». Нетрудно дать примеры некоторых довольно простых нелинейных динамических систем, где в зависимости от вида нелинейных функций $f_{1,2,3}$ возможны противоположные ситуации. Оказывается, что для получения значений текущего состояния на большом интервале времени (задача *прогнозирования*) с весьма скромной точностью (например, порядка 10^{-2}) требуется задание начального состояния с очень высокой точностью, не меньшей чем 10^{-10} , а иногда и 10^{-100} [7]. Такая точность практически недостижима, поэтому уравнения эволюции не могут реально «предсказать» поведение системы для достаточно отдаленных моментов времени в случае чрезвычайно большой чувствительности решений к малым изменениям начальных условий.

Конечно, если в рассуждениях встать на формальную точку зрения, то, во многих случаях, эта задача имеет решение, причем единственное при всех t – в силу теорем о существовании и единственности решений дифференциальных уравнений (читателю было бы полезно внимательно ознакомиться с точными формулировками этих общих теорем в хорошем учебнике по курсу дифференциальных уравнений). Однако на практике из-за нелинейности системы типичным является *невозможность* дать точное решение уравнений состояния в виде формульных (аналитических) зависимостей и уравнения приходится интегрировать численными методами. Из-за несовершенства этих методов иногда сталкиваются с проблемой правильной интерпретации полученных решений и их соответствия реальности. Проиллюстрируем эту проблему на элементарном примере.

Рассмотрим численное интегрирование уравнения гармонического осциллятора $d^2x/dt^2 + x = 0$ методом Эйлера. Переходя к записи в форме Коши, имеем систему двух уравнений 1-го порядка:

$$dx/dt = y, \quad dy/dt = -x,$$

или одно уравнение 1-го порядка $dy/dx = -x/y$. Если переписать его в виде $x dx + y dy = 0$, то становится очевидным, что оно имеет точное («аналитическое») решение: $x^2(t) + y^2(t) = R_0^2 = \text{const}$. Отсюда следует, что значение точного решения в момент $(t + \Delta t)$ ничем не отличается от значения решения в момент t , т.е. для точного решения при любом Δt справедливо соотношение

$$x^2(t + \Delta t) + y^2(t + \Delta t) = x^2(t) + y^2(t) = R_0^2 = \text{const}.$$

Посмотрим, что даст нам какой-либо численный метод решения этого дифференциального уравнения. По методу Эйлера дифференциальное уравнение аппроксимируется разностным, причем аппроксимация представляет собой разложение в ряд Тейлора состояния системы в момент времени $(t + \Delta t)$ с сохранением лишь первого члена

$$x(t + \Delta t) \cong x(t) + \frac{dx}{dt} \Delta t + \dots = x(t) + y(t) \Delta t + \dots,$$

$$y(t + \Delta t) \cong y(t) + \frac{dy}{dt} \Delta t + \dots = y(t) - x(t) \Delta t + \dots.$$

Возводя в квадрат обе части каждого из разложений и, складывая, получаем решение разностного уравнения:

$$x^2(t + \Delta t) + y^2(t + \Delta t) = [x^2(t) + y^2(t)] \cdot [1 + (\Delta t)^2].$$

Получается, что решение разностного уравнения не остается постоянным во времени, а неограниченно нарастает, тогда как решение дифференциального уравнения в любой момент времени одно и то же. Значит, численный метод Эйлера даже с применением чрезвычайно малого шага Δt не даст хорошего приближения к истинному решению дифференциального уравнения на больших интервалах времени!

Этот пример показывает нам, как неверно может интерпретироваться результат такого численного решения даже столь простого линейного дифференциального уравнения, как уравнение гармонического осциллятора. Если динамическая система нелинейная, а ее решения имеют сложное поведение на больших интервалах времени, то может оказаться, что наблюдаемые экспериментально свойства решений в корне противоречат тому, что получается в результате численной процедуры нахождения решения. Поэтому для верного понимания структуры движения системы

могут потребоваться совсем иные подходы к ее анализу, чем просто численное моделирование уравнений эволюции.

Такой принципиально новый подход еще 120 лет назад предложил великий французский физик и математик Анри Пуанкаре, впервые применивший геометрические методы к исследованию решений дифференциальных уравнений (Poincaré H. – Sur les courbes définies par une équation différentielle. “Journal de Mathématiques”, 3-е Série, v.7, 1881; v.8, 1882. Имеется русский перевод: Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. Классики естествознания. Гостехиздат, 1947).

Идея А. Пуанкаре состоит в том, чтобы взамен непосредственного наблюдения за развивающимся во времени процессом, т.е. решениями $u(t)$, $v(t)$, $w(t)$ системы дифференциальных уравнений (1.5), перейти к наблюдению его в «пространстве состояний» (или в фазовом пространстве), координатами которого являются динамические переменные системы u , v , w . При этом об эволюции динамической системы во времени t удобно судить по характеру движения изображающей ее точки в фазовом пространстве соответствующей размерности.

Следуя этой идее, в разделах курса «Теория колебаний», посвященных качественным (точнее, топологическим) методам исследования нелинейных систем, настойчиво проводится мысль о том, что непосредственное использование решения $u(t)$, $v(t)$, $w(t)$ во временной области для анализа поведения системы вообще оказывается весьма нерезультативным. Наблюдение временных решений $u(t)$, $v(t)$, $w(t)$ не дает возможности «охватить» всю эволюцию системы одним взглядом, увидеть ее сразу, в целом, в глобальном масштабе, на неограниченном интервале времени, при любых начальных условиях (как говорил основоположник советской школы теории колебаний академик А. А. Андронов [1] – «с высоты птичьего полета»).

Поэтому, следуя А. Пуанкаре и А. А. Андронову, в разделах теории колебаний, посвященных качественным ее методам, идут другим, косвенным путем – изучают эволюцию системы во времени *опосредованным способом*, рассматривая траектории движения изображающей ее точки в пространстве состояний (*фазовом пространстве*). Для систем невысокой размерности совокупность траекторий дает наглядный, легко воспринимаемый «на глаз» геометрический образ эволюции процесса, его топологию. Разработаны специальные приемы для построения полной картины фазовых траекторий (*фазовых портретов* системы). Особенно просто построить эти траектории в случае динамической системы 2-го порядка. Систематическое изложение аппарата *фазовой плоскости* (2- D фазовое пространство) в отечественной литературе впервые дано в основополагающей книге по теории колебаний – авторов А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин еще в 1937 году. Ее неизменное повторное издание вышло в 1981 году [1]. В данном пособии

мы дадим развернутую процедуру построения картин фазовых траекторий в окрестностях состояний равновесия нелинейных динамических систем 3-го порядка, т.е. в трехмерном ($3-D$) фазовом пространстве. Траектории $2-D$ пространства при этом рассматриваются как подвид траекторий $3-D$ пространства.

2. ИСХОДНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Высказанная А. Пуанкаре идея перехода от временных решений $u(t)$, $v(t)$, $w(t)$ к фазовым траекториям в пространстве состояний может быть развита в следующую процедуру. Вначале получим связь (опять же в виде дифференциальных уравнений) любой из координат $u(t)$, $v(t)$, $w(t)$ с двумя другими, исключив каким-либо образом входящее в них как текущий параметр время t . Для этого в уравнениях движения (1.5,а)–(1.5,б) выделим отдельно элемент времени dt , составив систему равенств:

$$dt = du / f_1(u, v, w) = dv / f_2(u, v, w) = dw / f_3(u, v, w). \quad (2.1)$$

Это соотношение можно трактовать и как формулу, позволяющую вычислить элементарное перемещение системы в фазовом пространстве из точки с координатами u, v, w в точку $u + du, v + dv, w + dw$, происходящее за время dt в силу уравнения движения (1.5).

Теперь выберем какое-либо из равенств (2.1), например, последнее, и разделим на него поочередно два предыдущих. В результате получим систему уже не из трех, а всего лишь из двух дифференциальных уравнений, в которых элемент dt не содержится

$$du/dw = f_1(u, v, w) / f_3(u, v, w), \quad (2.2,а)$$

$$dv/dw = f_2(u, v, w) / f_3(u, v, w). \quad (2.2,б)$$

Таким образом, *исключение времени* (точнее, его элемента dt) сопровождается понижением порядка системы уравнений на единицу. В этом можно видеть первое преимущество предложенного Пуанкаре перехода к фазовому пространству.

С геометрической точки зрения каждое из уравнений (2.2,а) и (2.2,б) задает в рассматриваемой точке (u, v, w) трехмерного фазового пространства соответствующий угловой коэффициент du/dw или dv/dw касательных к фазовой траектории, проходящей через эту точку, по отношению к направлению оси координат w . Ясно, что взамен них тем же путем можно при желании получить угловые коэффициенты касательных по отношению к направлению любой из двух других осей – либо v , либо u (например, du/dv и dw/dv , или dv/du и dw/du).

Уравнения для угловых коэффициентов (2.2,а)–(2.2,б) как бы «сопровождают» точку (u, v, w) , движущуюся в фазовом трехмерном пространстве с течением времени, которое играет в этих «сопровождающих уравнениях» роль текущего параметра.

Если бы нам удалось точно проинтегрировать сопровождающие уравнения и получить выражения двух координат $u(w)$ и $v(w)$ через третью координату w , то тем самым были бы найдены трехмерные кривые в фазовом пространстве, по которым движется точка, изображающая эволюцию системы в этом пространстве. Очевидно, что на практике нахождение решений системы двух нелинейных дифференциальных уравнений (2.2,а)–(2.2,б) всегда будет существенно проще, чем отыскание решений исходной динамической системы (1.5,а)–(1.5,в), состоящей из трех нелинейных уравнений.

Особенно очевидна выгода от использования сопровождающих уравнений в случае, когда исходная НДС имеет не 1,5 степени свободы, а одну, т.е. описывается системой двух нелинейных дифференциальных уравнений:

$$du/dt = f_1(u, v), \quad (2.3,а)$$

$$dv/dt = f_2(u, v). \quad (2.3,б)$$

В этом частном, но практически очень важном случае мы получаем всего лишь одно сопровождающее уравнение для траекторий:

$$du/dv = f_1(u, v) / f_2(u, v), \quad (2.4)$$

так что порядок уравнений, описывающих нелинейную динамическую систему, понижается вдвое! В разделе 3 мы более подробно остановимся на способах решения сопровождающего уравнения (2.4).

Решение дифференциального уравнения 1-го порядка (2.4) дает семейство траекторий с одним параметром “ t ”; это семейство, как выражаются математики, располагается на «2-мерном многообразии u, v ». Топология этого многообразия – плоскость, поверхность цилиндра, тора или сферы – полностью определяется спецификой нелинейных функций $f_1(u, v)$ и $f_2(u, v)$.

В случае динамической системы 3-го порядка требуется найти решения уже не одного, а двух сопровождающих уравнений (2.2,а)–(2.2,б). Это даст семейство траекторий на 3-мерном многообразии u, v, w , т.е. трехмерный фазовый портрет исходной динамической системы (1.5,а)–(1.5,в).

Изучение фазовых портретов взамен анализа временных решений дает еще одно преимущество подхода А. Пуанкаре – мы как бы «получаем власть» над начальными условиями. Вместо того, чтобы каждый раз заново

вычислять набор временных решений $u(t)$, $v(t)$, $w(t)$ нелинейных уравнений (1.5,а)–(1.5,в) при смене начальных условий, мы можем рассматривать различные траектории в фазовом пространстве как проходящие через различные точки $X_{\text{нач}} = (u_{\text{нач}}, v_{\text{нач}}, w_{\text{нач}})$ фазового портрета.

Рассмотрим теперь некоторые общие свойства системы (2.2,а)–(2.2,б) двух сопровождающих уравнений.

Во всех точках (u, v, w) трехмерного фазового пространства, где их правые части имеют определенные значения, угловые коэффициенты касательных к фазовым траекториям также определены единственным образом. Такие точки называют *обыкновенными*, или *регулярными*. Через них проходит единственная траектория, что является отражением известной теоремы о существовании и единственности решения из теории дифференциальных уравнений. Другими словами, траектории не могут пересекаться в регулярных точках фазового пространства.

Если же в силу свойств нелинейных функций $f_{1,2,3}(u, v, w)$ исходной динамической системы (1.5,а)–(1.5,в) найдутся такие точки (u^0, v^0, w^0) пространства, для которых не выполняются указанные условия для правых частей сопровождающих уравнений, то в этих точках угловые коэффициенты касательных не определены и условия теоремы о единственности решения нарушаются (например, может появиться неопределенность вида $du/dw = 0/0$, $dv/dw = 0/0$). Значит, через такие точки (их называют *особыми*, в отличие от регулярных) может проходить более чем одна фазовая траектория, бесконечное их число, или не проходить ни одной траектории.

Наиболее типичным примером особых точек являются так называемые *состояния равновесия* динамической системы, которые определяются как постоянные во времени значения решений $u(t)$, $v(t)$, $w(t)$ в пределе при t (конечно, если такие пределы существуют):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = u^0 = \text{const} ; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = v^0 = \text{const} ; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = w^0 = \text{const} . \quad (2.5)$$

В точках равновесия (u^0, v^0, w^0) производные координат по времени равны нулю $du^0/dt = dv^0/dt = dw^0/dt = 0$, что переводит систему дифференциальных уравнений (1.5,а)–(1.5,в) в систему трех алгебраических уравнений:

$$f_1(u^0, v^0, w^0) = 0 , \quad (2.6,а)$$

$$f_2(u^0, v^0, w^0) = 0 , \quad (2.6,б)$$

$$f_3(u^0, v^0, w^0) = 0 . \quad (2.7,в)$$

Эти уравнения обычно называют *уравнениями равновесия*, поскольку их решение дает нам координаты всех возможных состояний равновесия (ведь точек равновесия может быть несколько, в зависимости от вида

нелинейных функций $f_{1,2,3}$). Иногда о них говорят также и как об уравнениях *стационарного режима*, имея в виду, что равновесие достигается лишь в пределе при $t \rightarrow \infty$, когда закончатся переходные процессы установления состояний равновесия.

Будем считать далее, что все решения алгебраических уравнений (2.6,а)–(2.6,в) найдены и координаты всех состояний равновесия $(u^0, v^0, w^0)_{1,2,\dots,r}$ нам известны.

Дальнейшее исследование свойств потока траекторий в фазовом пространстве становится более наглядным, если предварительно разобраться с их структурой хотя бы в малой окрестности каждого из состояний равновесия.

Такой «локальный» анализ можно провести в весьма общей форме, используя процедуру линеаризации исходных нелинейных уравнений (1.5,а)–(1.5,в) в достаточно малых окрестностях каждой из точек равновесия. Получив в результате точную картину траекторий вблизи этих особых точек, можно затем сделать ряд выводов и о глобальной картине фазового портрета нелинейной системы, опираясь на некоторые общие теоремы и закономерности векторного анализа поля траекторий.

Начнем изложение формальной процедуры линеаризации уравнений со случая динамической системы с 1,5 степенями свободы, т.е. для 3–мерного фазового пространства. Особенности векторного поля и детальные примеры расположения характерных траекторий мы проведем поэтапно – для лучшей иллюстрации существа дела вначале представим и обсудим картины траекторий в 2–мерном пространстве, а лишь затем перейдем к более сложным конструкциям 3–мерного фазового пространства.

3. ОБЩИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ, ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ В МАЛОЙ ОКРЕСТНОСТИ СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ

Напомним основные положения теории колебаний, относящиеся к локальному исследованию решений уравнений движения в малых окрестностях состояний равновесия нелинейных динамических систем (см., например, [1–5]).

Общий подход к локальному анализу какого-либо из найденных ранее равновесных состояний равновесия $(u^0, v^0, w^0)_{1,2,\dots,k}$ состоит в линеаризации всех трех исходных нелинейных дифференциальных уравнений (1.5,а)–(1.5,в) в малой окрестности рассматриваемой точки равновесия. Для этого составляют так называемые уравнения линейного приближения, справедливые лишь для малых вариаций $\xi(t)$, $\eta(t)$ и $\mu(t)$, которые выступают в качестве независимых возмущений координат $u(t)$, $v(t)$ и $w(t)$ в окрестности данного состояния, равновесия. Можно сказать, что в исходных дифференциальных уравнениях производят замену переменных по формулам

$$u(t) = u^0 + \xi(t), \quad v(t) = v^0 + \eta(t), \quad w(t) = w^0 + \mu(t). \quad (3.1)$$

Тогда общая запись исходных уравнений принимает вид

$$du(t)/dt = f_1 [u^0 + \xi(t), v^0 + \eta(t), w^0 + \mu(t)], \quad (3.2,а)$$

$$dv(t)/dt = f_2 [u^0 + \xi(t), v^0 + \eta(t), w^0 + \mu(t)], \quad (3.2,б)$$

$$dw(t)/dt = f_3 [u^0 + \xi(t), v^0 + \eta(t), w^0 + \mu(t)], \quad (3.2,в)$$

где конкретные значения u^0 , v^0 , w^0 известны из уравнений (2.6,а)–(2.6,в) для каждого из состояний равновесия $(u^0, v^0, w^0)_{1,2,\dots,r}$.

Ясно, что уравнения (3.2,а)–(3.2,в) такие же нелинейные, как и исходные (1.5,а)–(1.5,в); разница лишь в выборе начала отсчета, поскольку в (3.2,а)–(3.2,в) за начало отсчета выбрана рассматриваемая точка равновесия. Если теперь дополнительно положить возмущения $\xi(t)$, $\eta(t)$, $\mu(t)$ «достаточно малыми» и считать функции $f_{1,2,3}$ имеющими частные производные по всем координатам, то правые части выражений (3.2,а)–(3.2,в) можно разложить в тройные ряды Тейлора по степеням малых возмущений. Далее можем пренебречь всеми членами разложения со степенями выше

первой (т.е. сохранить лишь линейные члены). Тогда взамен исходной НДС (3.2,а)–(3.2,в) получим ее *линейную модель*, справедливую для малых вариаций координат вблизи выбранного состояния равновесия

$$d\xi/dt = f_1(u^0, v^0, w^0) + f_{1u}'(u^0, v^0, w^0) \cdot \xi + f_{1v}'(u^0, v^0, w^0) \cdot \eta + f_{1w}'(u^0, v^0, w^0) \cdot \mu + \\ + \text{члены более высокого порядка малости;} \quad (3.3,а)$$

$$d\eta/dt = f_2(u^0, v^0, w^0) + f_{2u}'(u^0, v^0, w^0) \cdot \xi + f_{2v}'(u^0, v^0, w^0) \cdot \eta + f_{2w}'(u^0, v^0, w^0) \cdot \mu + \\ + \text{члены более высокого порядка малости;} \quad (3.3,б)$$

$$d\mu/dt = f_3(u^0, v^0, w^0) + f_{3u}'(u^0, v^0, w^0) \cdot \xi + f_{3v}'(u^0, v^0, w^0) \cdot \eta + f_{3w}'(u^0, v^0, w^0) \cdot \mu + \\ + \text{члены более высокого порядка малости.} \quad (3.3,в)$$

В этих выражениях первые слагаемые $f_1(u^0, v^0, w^0)$, $f_2(u^0, v^0, w^0)$ и $f_3(u^0, v^0, w^0)$ равны нулю, поскольку они и есть левые части уравнений (2.6,а)–(2.6,в), которые использовались для отыскания координат u^0, v^0, w^0 точек равновесия. Производные нелинейных функций f_1', f_2' и f_3' по динамическим переменным u, v и w должны быть вычислены в соответствующих точках равновесия. Эти значения производных для краткости будем обозначать буквами a_{ij} , где 1-й индекс соответствует номеру нелинейной функции, а 2-й относится к соответствующей динамической переменной. Тогда линеаризованные уравнения (3.3,а)–(3.3,в) можно представить в компактной векторно-матричной записи

$$\begin{pmatrix} d\xi/dt \\ d\eta/dt \\ d\mu/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \mu \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

с начальными условиями: при $t = 0$ заданы величины $\xi(0) = \xi_{\text{нач}}$, $\eta(0) = \eta_{\text{нач}}$, $\mu(0) = \mu_{\text{нач}}$.

Эту запись можно сделать еще компактнее, если ввести трехкомпонентный вектор состояния $X(t) = [\xi(t), \eta(t), \mu(t)]^T$ и матрицу коэффициентов

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Тогда уравнения (3.4) примут векторно-матричную форму записи

$$dX(t)/dt = A X(t), \quad t = 0: X(0) = X_{\text{нач}}. \quad (3.6)$$

Эта форма удобна тем, что она не требует указания на размерность уравнений состояния. Матрицу A называют иногда переходной матрицей, поскольку она управляет динамикой процесса $X(t)$ (или матрицей устойчивости, в связи с тем, что ее коэффициенты определяют характер устойчивости системы).

Частные решения $\xi(t)$, $\eta(t)$, $\mu(t)$ однородной системы линейных дифференциальных уравнений (3.4) имеют вид

$$\xi(t) = k_1 B \exp(\lambda t), \quad \eta(t) = k_2 B \exp(\lambda t), \quad \mu(t) = k_3 B \exp(\lambda t), \quad (3.7)$$

где B – постоянная величина, определяемая начальными условиями. Здесь все компоненты вектора состояния имеют, естественно, один и тот же (экспоненциальный) закон изменения во времени и могут отличаться лишь своими весами, которые учитываются так называемыми *коэффициентами распределения* $k_{1,2,3}$. Поскольку величину B считаем заданной из начальных условий (фактическое ее нахождение производится на более позднем этапе – после нахождения общего решения уравнений (3.4)), то один из них, например k_1 , следует принять равным единице. Поэтому далее мы автоматически полагаем в (3.7) коэффициент $k_1 = 1$. Показатель экспоненты λ называют *характеристическим показателем*, поскольку он указывает на характер изменения решения во времени.

Величины λ и $k_{2,3}$ находятся поочередно. Коэффициенты распределения при исследовании характера локальной устойчивости не требуются (они понадобятся позже, при построении точных картин фазовых траекторий в окрестностях состояний равновесия), а для нахождения неизвестных пока характеристических показателей отметим, что производные решений $d\xi/dt$, $d\eta/dt$ и $d\mu/dt$ связаны с самими решениями $\xi(t) = B \exp(\lambda t)$, $\eta(t) = k_2 B \exp(\lambda t)$, $\mu(t) = k_3 B \exp(\lambda t)$ множителем λ

$$d\xi/dt = \lambda \xi(t), \quad d\eta/dt = \lambda \eta(t), \quad d\mu/dt = \lambda \mu(t).$$

Подставив эти выражения производных в (3.4), получаем взамен системы линейных дифференциальных уравнений однородную систему алгебраических уравнений

$$[(a_{11} - \lambda) + a_{12} + a_{13}] \xi(t) = 0, \quad (3.8, a)$$

$$[a_{21} + (a_{22} - \lambda) + a_{23}] \eta(t) = 0, \quad (3.8, б)$$

$$[a_{31} + a_{32} + (a_{33} - \lambda)] \mu(t) = 0. \quad (3.8, в)$$

Заметим, что наряду с записью (3.8), где фигурируют все три динамические переменные, бывает целесообразно оперировать лишь с одной из них, например, с $\xi(t)$, а две другие учитывать с помощью соответствующих коэффициентов распределения. При этом справедливы следующие связи производных $d\xi/dt$, $d\eta/dt$ и $d\mu/dt$ с переменной $\xi(t)$

$$d\xi/dt = \lambda \cdot \xi(t), \quad d\eta/dt = k_2 \cdot d\xi(t)/dt = k_2 \lambda \cdot \xi(t), \quad d\mu/dt = k_3 \cdot d\xi(t)/dt = k_3 \lambda \cdot \xi(t).$$

Используя эти связи в (3.4), опять получаем однородную систему алгебраических уравнений, однако она содержит лишь одну динамическую переменную $\xi(t)$ и коэффициенты λ и $k_{2,3}$ (которые подлежат нахождению)

$$[(a_{11} - \lambda) + k_2 a_{12} + k_3 a_{13}] \xi(t) = 0, \quad (3.9, a)$$

$$[a_{21} + k_2(a_{22} - \lambda) + k_3 a_{23}] \xi(t) = 0, \quad (3.9, б)$$

$$[a_{31} + k_2 a_{32} + k_3(a_{33} - \lambda)] \xi(t) = 0. \quad (3.9, в)$$

Выражения (3.8) позволят нам найти характеристические показатели, а (3.9) – коэффициенты распределения. Излагаемая ниже процедура пригодна для линеаризованных систем произвольного порядка, мы рассмотрим случай $N = 3$.

Поскольку решения $\xi(t)$, $\eta(t)$ и $\mu(t)$ не могут быть тождественно равны нулю, то для совместности системы уравнений (3.8) необходимо, чтобы в нуль обращался определитель этой системы

$$\det(A - \lambda I) = 0, \quad (3.10)$$

где I – единичная матрица.

Условие (3.10) дает нам так называемое *характеристическое уравнение*, которое и служит для отыскания значений характеристических показателей λ

$$(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (3.11)$$

Раскрывая определитель (3.11), получаем в общей записи характеристический полином 3-й степени

$$\Delta(\lambda) = \lambda^3 + \underline{A}\lambda^2 + \underline{B}\lambda + \underline{C} = 0. \quad (3.12)$$

Его коэффициенты \underline{A} , \underline{B} , и \underline{C} связаны с коэффициентами матрицы A следующими формулами

$$\begin{aligned}\underline{A} &= -\text{Tr } A = -\sum a_{ii}; \quad i \in (1,3); \\ \underline{B} &= \sum_{\text{diag}} \text{Minor } A = \sum (a_{ii}a_{jj} - a_{ij}a_{ji}); \quad i, j \in (1,3); j > i; \\ \underline{C} &= -\det A.\end{aligned}\quad (3.13)$$

Характеристический полином $\Delta(\lambda) = 0$ имеет три корня λ_1 , λ_2 и λ_3 , являющиеся его решениями. Зная коэффициенты полинома \underline{A} , \underline{B} и \underline{C} , которые связаны с коэффициентами a_{ij} матрицы A (а значит, и с параметрами динамической системы, входящими в состав нелинейных функций f_1 , f_2 и f_3), мы можем вычислить значения каждого из корней. Далее считаем, что все корни λ_1 , λ_2 и λ_3 найдены (мы не станем приводить здесь известные, но довольно громоздкие формулы для нахождения корней кубического уравнения).

Поскольку характеристических корней три, то каждое из частных решений $\xi(t)$, $\eta(t)$ и $\mu(t)$ в (3.7) состоит из трех “движений” – первое “движется” с экспоненциальным показателем $\lambda_1 t$, второе с $\lambda_2 t$, третье с $\lambda_3 t$. Эти движения входят в решения с разным весовым вкладом, который определяется коэффициентом распределения k_{ij} (первые индексы нумеруют решения $\eta(t)$ и $\mu(t)$, соответственно, а вторые индексы относятся каждый к своему характеристическому показателю λ_1 , λ_2 и λ_3 ; для решения $\xi(t)$ коэффициенты $k_{ij} = 1$)

$$\xi(t) = B_1 \exp(\lambda_1 t) + B_2 \exp(\lambda_2 t) + B_3 \exp(\lambda_3 t), \quad (3.14, a)$$

$$\eta(t) = k_{21} B_1 \exp(\lambda_1 t) + k_{22} B_2 \exp(\lambda_2 t) + k_{23} B_3 \exp(\lambda_3 t), \quad (3.14, б)$$

$$\mu(t) = k_{31} B_1 \exp(\lambda_1 t) + k_{32} B_2 \exp(\lambda_2 t) + k_{33} B_3 \exp(\lambda_3 t). \quad (3.14, в)$$

Здесь произвольные постоянные $B_{1,2,3}$ определяются начальными условиями: при $t = 0$ заданы $\xi(0) = \xi_{\text{нач}}$, $\eta(0) = \eta_{\text{нач}}$, $\mu(0) = \mu_{\text{нач}}$ и значения $B_{1,2,3}$ находим, решив систему трех линейных уравнений, в которую переходит система (3.14,а)–(3.14,в) при $t = 0$

$$\begin{aligned}B_1 + B_2 + B_3 &= \xi_{\text{нач}}, \\ k_{21} B_1 + k_{22} B_2 + k_{23} B_3 &= \eta_{\text{нач}}, \\ k_{31} B_1 + k_{32} B_2 + k_{33} B_3 &= \mu_{\text{нач}}.\end{aligned}\quad (3.15)$$

Входящие сюда значения коэффициентов распределения следует считать известными; сейчас мы покажем, что их можно найти. Для этого не требуются произвольные постоянные $B_{1,2,3}$, а нужно лишь располагать полученными ранее характеристическими показателями $\lambda_{1,2,3}$. С этой целью

перейдем к векторно-матричной форме записи общих решений (3.14,а)–(3.14,е); эта запись очень компактна

$$\begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \\ \mu(t) \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} B_1 \exp(\lambda_1 t) \\ B_2 \exp(\lambda_2 t) \\ B_3 \exp(\lambda_3 t) \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

или еще короче

$$X(t) = K B(t). \quad (3.17)$$

Здесь K – матрица коэффициентов распределения, она выглядит следующим образом

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Кроме того, введен вектор *главных движений*

$$B(t) = [B_1 \exp(\lambda_1 t), B_2 \exp(\lambda_2 t), B_3 \exp(\lambda_3 t)]^T, \quad (3.19)$$

каждый из компонентов которого «движется» во времени экспоненциально лишь с одним характеристическим показателем.

Для полного описания общих решений $\xi(t)$, $\eta(t)$ и $\mu(t)$ нужно теперь отыскать эти 6 коэффициентов распределения. Элементы матрицы K можно найти из системы уравнений (3.9), используя любые два из этих уравнений трижды – для 1-го, 2-го и 3-го характеристического корня (третье уравнение не нужно, т.к. мы уже приняли в частном решении $k_1 = 1$). Например, используем два первых и взамен λ поставим λ_1

$$a_{12} k_{21} + a_{13} k_{31} = (\lambda_1 - a_{11}), \quad (3.20,а)$$

$$(a_{22} - \lambda_1) k_{21} + a_{23} k_{31} = -a_{21}. \quad (3.20,б)$$

Отсюда обычным образом находим k_{21} и k_{31}

$$k_{21} = \frac{1}{D_1} \begin{vmatrix} (\lambda_1 - a_{11}) & a_{13} \\ -a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}; \quad k_{31} = \frac{1}{D_1} \begin{vmatrix} a_{12} & (\lambda_1 - a_{11}) \\ (a_{22} - \lambda_1) & -a_{21} \end{vmatrix}, \quad (3.21) \quad \checkmark$$

где определитель системы (3.20)

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ (a_{22} - \lambda_1) & a_{23} \end{vmatrix}. \quad (3.22)$$

Таким же образом, используя взамен λ_1 характеристический показатель λ_2 , найдем k_{22} и k_{32}

$$k_{22} = \frac{1}{D_2} \begin{vmatrix} (\lambda_2 - a_{11}) & a_{13} \\ -a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}; \quad k_{32} = \frac{1}{D_2} \begin{vmatrix} a_{12} & (\lambda_2 - a_{11}) \\ (a_{22} - \lambda_2) & -a_{21} \end{vmatrix}, \quad (3.23)$$

где

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ (a_{22} - \lambda_2) & a_{23} \end{vmatrix}. \quad (3.24)$$

Наконец, используя λ_3 , получим коэффициенты k_{23} и k_{33}

$$k_{23} = \frac{1}{D_3} \begin{vmatrix} (\lambda_3 - a_{11}) & a_{13} \\ -a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}; \quad k_{33} = \frac{1}{D_3} \begin{vmatrix} a_{12} & (\lambda_3 - a_{11}) \\ (a_{22} - \lambda_3) & -a_{21} \end{vmatrix}, \quad (3.25)$$

где

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ (a_{22} - \lambda_3) & a_{23} \end{vmatrix}. \quad (3.26)$$

Итак, считаем найденными все 3 характеристических показателя и все 6 коэффициентов распределения (можно сказать, что на их отыскание мы «израсходовали» все 9 элементов a_{ij} матрицы состояния A). Кроме того, заданы 3 произвольные постоянные $B_{1,2,3}$. Это означает, что мы получили все необходимые характеристики каждого из движений $\xi(t)$, $\eta(t)$ и $\mu(t)$, составляющих общее решение (3.14,а)–(3.14,б). Они совокупно понадобятся нам на этапе построения картин фазовых траекторий в окрестностях исследуемых точек равновесия.

Замечание 1. Иногда исследователя на первых порах интересует даже не картина фазовых траекторий в окрестности данной точки равновесия, а всего лишь вопрос о ее локальной устойчивости. Для ответа на этот вопрос не нужны ни коэффициенты распределения, ни начальные условия – достаточно располагать лишь коэффициентами характеристического

полинома \underline{A} , \underline{B} и \underline{C} . Поэтому мы напомним, как решается вопрос локальной устойчивости состояния равновесия.

В случае линейной системы (3.4) с характеристическим полиномом $\Delta(\lambda)$ третьей степени (3.11) для этого даже не нужно знать численных значений характеристических корней λ_1, λ_2 и λ_3 , а требуется лишь критерий для установления их знака – ведь устойчивость гарантирована, если все три корня отрицательны (или, в случае двух комплексно-сопряженных корней, отрицательны их вещественные части).

Напомним известный из курса «Теория колебаний» [5] критерий Гурвица. Необходимым условием локальной устойчивости, т.е. отрицательности характеристических корней, является требование

$$\underline{A} > 0, \underline{B} > 0, \underline{C} > 0, \quad (3.27)$$

а достаточное условие требует, чтобы выполнялось неравенство

$$\underline{A} \underline{B} - \underline{C} > 0. \quad (3.28)$$

На границе локальной устойчивости

$$\underline{A} \underline{B} - \underline{C} = 0. \quad (3.29)$$

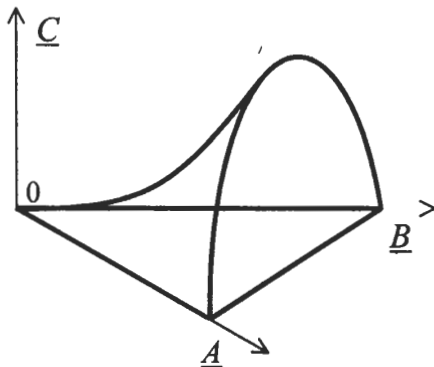


Рис.1. Граница локальной устойчивости в пространстве коэффициентов характеристического уравнения системы 3-го порядка.

Часть поверхности, заданной уравнением (3.29) в 3-х мерном пространстве коэффициентов (\underline{A} , \underline{B} , \underline{C}), изображена на рис. 1. В области, ограниченной этой поверхностью «сверху», а также плоскостью $\underline{C} = 0$ «снизу», выполняется условия (3.27)–(3.28) и решения системы (3.4) устойчивы, а во всей остальной области – неустойчивы.

Вернемся к процедуре построения картин фазовых траекторий в окрестности точек равновесия.

4. ВЫРАЖЕНИЯ ФАЗОВЫХ ТРАЕКТОРИЙ В ГЛАВНЫХ КООРДИНАТАХ

В теории колебаний отсутствуют подходящие приемы для построения полной картины фазовых траекторий исходной *нелинейной* системы 3-го порядка (1.5,а)–(1.5,в), они разработаны подробно лишь для систем 2-го порядка. В случае *линейной* динамической системы 3-го порядка (3.4), общее решение которой имеет вид (3.14,а)–(3.14,в), можно простым путем получить точные аналитические выражения для этих траекторий, которые, естественно, верны лишь в некоторой, достаточно малой окрестности рассматриваемого состояния равновесия. Приемлемый размер этой окрестности определяется на практике условиями конкретной задачи.

Главная идея перехода от временных решений в форме (3.14,а)–(3.14,в) к фазовым траекториям состоит в том, чтобы получить выражения любой из фазовых координат $\xi(t)$, $\eta(t)$, $\mu(t)$ через две других, исключив каким-либо образом входящее в них (как текущий параметр) время t .

В большинстве учебных руководств (особенно математической направленности) исключение времени проводят путем формальных и ненаглядных преобразований координат, плохо раскрывающих существо дела. Придавая большое педагогическое значение пониманию действий при переходе от временных решений к фазовым траекториям, мы проведем эти действия иначе и с наибольшей подробностью.

Будем исходить из полученных выше выражений общих решений (3.14) для *исходных координат*, которые в векторно–матричной записи (3.16) или (3.17) выглядят более компактно.

Введем *главные (нормальные) координаты* $U(t)$, $V(t)$, $W(t)$ рассматриваемой *линеаризованной* системы (3.4), в которых скорость движения вдоль каждой из координат определяется лишь одним из характеристических показателей. В главных координатах уравнения движения выглядят предельно просто

$$dU/dt = \lambda_1 U, \quad dV/dt = \lambda_2 V, \quad dW/dt = \lambda_3 W. \quad (4.1)$$

Их решения содержат лишь по одной экспоненциальной функции

$$U(t) = C_1 \exp(\lambda_1 t), \quad V(t) = C_2 \exp(\lambda_2 t), \quad W(t) = C_3 \exp(\lambda_3 t), \quad (4.2)$$

где постоянные $C_{1,2,3}$ определенным образом связаны с $B_{1,2,3}$, т.е. различие главных координат $U(t)$, $V(t)$, $W(t)$ и компонентов вектора $\mathbf{B}(t) = [B_1 \exp(\lambda_1 t), B_2 \exp(\lambda_2 t), B_3 \exp(\lambda_3 t)]^T$ — лишь в значениях постоянных коэффициентов.

Наша задача состоит в том, чтобы найти формулы перехода от исходных координат $\xi(t)$, $\eta(t)$, $\mu(t)$ к главным координатам $U(t)$, $V(t)$, $W(t)$, а затем, исключив время, выразить каждую из главных координат через две другие. Это и даст нам выражение траекторий в 3-мерном фазовом пространстве.

Сопоставим выражения главных координат (4.2) с общим решением (3.14) для исходных координат. Видим, что с точностью до обозначений постоянных ($C_{1,2,3}$ вместо $B_{1,2,3}$) слагаемые в правых частях (3.14) непосредственно связаны с главными координатами. Поэтому выразим эти слагаемые (компоненты вектора $\mathbf{B}(t)$) через исходные координаты $\xi(t)$, $\eta(t)$, $\mu(t)$

$$B_1 \exp(\lambda_1 t) = \frac{1}{\det K} \begin{vmatrix} \xi & 1 & 1 \\ \eta & k_{22} & k_{23} \\ \mu & k_{32} & k_{33} \end{vmatrix}, \quad (4.3, a)$$

$$B_2 \exp(\lambda_2 t) = \frac{1}{\det K} \begin{vmatrix} 1 & \xi & 1 \\ k_{21} & \eta & k_{23} \\ k_{31} & \mu & k_{33} \end{vmatrix}, \quad (4.3, б)$$

$$B_3 \exp(\lambda_3 t) = \frac{1}{\det K} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \xi \\ k_{21} & k_{22} & \eta \\ k_{31} & k_{32} & \mu \end{vmatrix}. \quad (4.3, в)$$

Если обозначить $B_{1,2,3} \cdot \det K = C_{1,2,3}$, то выражения (4.3,а)–(4.3,в) дают следующие формулы перехода от исходных координат $\xi(t)$, $\eta(t)$, $\mu(t)$ к главным координатам $U(t)$, $V(t)$, $W(t)$

$$U = \begin{vmatrix} \xi & 1 & 1 \\ \eta & k_{22} & k_{23} \\ \mu & k_{32} & k_{33} \end{vmatrix}, \quad V = \begin{vmatrix} 1 & \xi & 1 \\ k_{21} & \eta & k_{23} \\ k_{31} & \mu & k_{33} \end{vmatrix}, \quad W = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \xi \\ k_{21} & k_{22} & \eta \\ k_{31} & k_{32} & \mu \end{vmatrix}. \quad (4.4)$$

Теперь можем пользоваться полностью определенным описанием (4.2) движения в главных координатах. Чтобы исключить из них время t , достаточно просто попарно возвести главные координаты в степени λ_1 , λ_2

или λ_3 . В результате получаем искомые соотношения между главными координатами

$$U^{\lambda_1} = C_{12}V^{\lambda_1}, \quad V^{\lambda_2} = C_{23}W^{\lambda_2}, \quad W^{\lambda_3} = C_{31}U^{\lambda_3}, \quad (4.5)$$

где константы C_{ij} связаны с величинами $C_{1,2,3}$ через значения $\lambda_{1,2,3}$. Поскольку при построении фазовых траекторий по формулам (4.5) эти константы назначаются произвольно, нет необходимости раскрывать сейчас связи между C_{ij} и $C_{1,2,3}$.

В процессе построения траекторий может оказаться удобнее использовать формулы (4.5) в другой записи

$$U = C_{21}V^{\lambda_1/\lambda_2}, \quad V = C_{32}W^{\lambda_2/\lambda_3}, \quad W = C_{13}U^{\lambda_3/\lambda_1}. \quad (4.6)$$

где использованы новые обозначения для произвольно назначаемых констант.

Итак, процедура исключения времени из выражений главных координат в форме (4.2) завершена и можно перейти к рассмотрению типа фазовых траекторий и классификации особых точек. Это определяется тем, какие значения принимают корни $\lambda_{1,2,3}$ характеристического уравнения. Поскольку три корня могут принимать различные значения (либо все действительные, либо один действительный и два комплексно-сопряженных), то получается большой набор типов особых точек в случае 3-мерного фазового пространства.

Чтобы сделать на первом этапе «знакомства с фазовыми траекториями» выкладки менее громоздкими, мы разобьем это знакомство на два шага и взамен трудно воспринимаемого студентами с первого раза рассмотрения 3-мерного фазового пространства начнем с гораздо более простого и наглядного 2-мерного случая. При этом получится простая и краткая классификация особых точек по типу фазовых траекторий в их окрестности, от которой удобно «стартовать» в более громоздком наборе особых точек 3-мерного пространства. Чтобы лучше закрепить навыки обращения с полученными общими выражениями, мы иногда позволим себе некоторые повторения выкладок в 2-мерном случае вместо того, чтобы использовать общие формулы 3-мерного случая.

5. ФАЗОВЫЕ ТРАЕКТОРИИ 2-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

В случае 2-мерного фазового пространства, т.е. фазовой поверхности, оставляем какие-либо два из трех уравнений (1.5,а)–(1.5,б), например, сохраняем динамические переменные u и v

$$du/dt = f_1(u, v), \quad (5.1,а)$$

$$dv/dt = f_2(u, v). \quad (5.1,б)$$

Выделение элемента времени

$$dt = du / f_1(u, v) = dv / f_2(u, v) \quad (5.2)$$

приводит к одному лишь сопровождающему уравнению для траекторий

$$dv/du = f_2(u, v) / f_1(u, v). \quad (5.3)$$

В силу теоремы единственности траектории, которые получатся в результате решения сопровождающего уравнения (5.3), не могут пересекаться в регулярных точках фазовой поверхности (u, v) , где обе нелинейные функции $f_1(u, v)$ и $f_2(u, v)$ одновременно не обращаются в нуль, т.е. угловой коэффициент касательных к фазовым траекториям однозначно определен. Эта определенность нарушается в точках равновесия u^0, v^0 :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = u^0 = \text{const}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = v^0 = \text{const}. \quad (5.4)$$

Они являются особыми точками, их существует определенное количество, а координаты u^0, v^0 находятся из решения уравнений равновесия:

$$f_1(u^0, v^0) = 0, \quad (5.5,а)$$

$$f_2(u^0, v^0) = 0. \quad (5.5,б)$$

Значит, в точках равновесия, согласно (5.3), имеем неопределенность вида $dv/du = 0/0$.

Кроме того, если на фазовой поверхности имеется замкнутая траектория, то она (во временной области) соответствует *периодическому*

решению $\tilde{u}(t) = \tilde{u}(t+T), \tilde{v}(t) = \tilde{v}(t+T)$, причем период T можно найти путем интегрирования соотношений (5.2)

$$T = \oint \frac{d\tilde{u}}{f_1(\tilde{u}, \tilde{v})} = \oint \frac{d\tilde{v}}{f_2(\tilde{u}, \tilde{v})}.$$

Таким образом, в 2-мерных нелинейных динамических системах возможны лишь два типа стационарных состояний – точки равновесия и периодические движения. Уместно заметить, что для 3-мерных систем к этим простейшим стационарным состояниям могут добавиться гораздо более сложные движения.

Рассмотрим подробно процедуру построения фазовых траекторий в окрестности состояний равновесия 2-мерной системы. Ее линейная модель описывается матрицей состояния A размера 2×2

$$\begin{pmatrix} d\xi/dt \\ d\eta/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

Частные решения системы дифференциальных уравнений (5.6) имеют вид

$$\xi(t) = B \exp(\lambda t), \quad \eta(t) = k_2 B \exp(\lambda t). \quad (5.7)$$

Производные по времени частных решений выражаются через сами эти решения следующим образом

$$d\xi/dt = \lambda \xi; \quad d\eta/dt = \lambda \eta = \lambda k_2 \xi.$$

Их подстановка в (5.6) приводит к однородной системе двух алгебраических уравнений

$$(a_{11} - \lambda) \xi + a_{12} \eta = 0, \quad (5.8,a)$$

$$a_{21} \xi + (a_{22} - \lambda) \eta = 0, \quad (5.8,b)$$

или в другой записи, вводя замену $\eta = k_2 \xi$

$$[(a_{11} - \lambda) + k_2 a_{12}] \xi(t) = 0, \quad (5.9,a)$$

$$[a_{21} + k_2 (a_{22} - \lambda)] \xi(t) = 0. \quad (5.9,b)$$

Имея в виду, что решения $\xi(t), \eta(t)$ не могут тождественно равняться нулю и зная 4 элемента a_{ij} матрицы A в (5.6), из (5.8,a)–(5.8,b) находим два характеристических показателя λ_1, λ_2 , а затем из (5.9,a)–(5.9,b) и два

соответствующих им коэффициента распределения k_{21}, k_{22} (конечно, в данном случае двойные индексы не нужны – можно первые индексы у коэффициентов k_{21}, k_{22} отбросить, т.е. взамен k_{21} писать k_1 , а взамен k_{22} – просто k_2 ; мы их сохранили здесь лишь для удобства сравнения в последующем с 3–мерным случаем).

Для составления характеристического уравнения приравняем нулю определитель системы (5.8,а)–(5.8,б)

$$(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (5.10)$$

что приводит к уравнению 2–го порядка:

$$\lambda^2 + A\lambda + B = 0. \quad (5.11)$$

Здесь

$$A = -(a_{11} + a_{22}) = -\text{Tr } A, \quad B = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = \det A. \quad (5.12)$$

Решение (5.10) дает два характеристических корня

$$\lambda_{1,2} = -\frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} - B} = \frac{(a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}}}{2}. \quad (5.13)$$

Значения корней становятся комплексно–сопряженными $\lambda_{1,2} = \lambda_{\text{в}} \pm j\lambda_{\text{м}}$ при условии

$$(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} < 0. \quad (5.14)$$

Что касается коэффициентов распределения $k_{21,22}$, то их можно выразить двояко – либо непосредственно через коэффициенты a_{ij} , либо привлекая значения $\lambda_{1,2}$. Используя (5.9,а) и (5.9,б) и учитывая, что решение $\xi(t)$ не может тождественно равняться нулю, получаем для k_2 и λ два равенства

$$a_{11} + a_{12}k_2 = \lambda, \quad (5.15,а)$$

$$a_{21} + a_{22}k_2 = \lambda k_2. \quad (5.15,б)$$

Разделив одно из них на другое, исключаем λ и получаем для k_2 следующее квадратное уравнение

$$a_{12}k_2^2 + (a_{11} - a_{22})k_2 - a_{21} = 0. \quad (5.16)$$

Его иногда называют *уравнением коэффициентов распределения*, поскольку оно дает два значения для коэффициентов распределения

$$k_{21,22} = \frac{(a_{22} - a_{11}) \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}}}{2a_{12}}. \quad (5.17)$$

Видим, что значения коэффициентов распределения становятся комплексно-сопряженными $k_{21,22} = k_b + jk_m$ при том же условии (5.14), при котором корни характеристического уравнения (5.13) становились комплексно-сопряженными.

Формула (5.17) выражает коэффициенты распределения через четыре коэффициента a_{ij} матрицы состояния исходной системы. Иногда целесообразно связать коэффициенты распределения с корнями характеристического уравнения. Это легко сделать с помощью соотношений (5.15,а), (5.15,б). Назначая в них для λ уже найденные два значения (λ_1 и λ_2), получаем выражение коэффициентов распределения через характеристические корни и коэффициенты a_{ij} матрицы состояния:

$$k_{21,22} = \frac{\lambda_{1,2} - a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{21}}{\lambda_{1,2} - a_{22}}. \quad (5.18)$$

Заметим, что отсюда «перемножением по диагоналям» снова получается выражение характеристического полинома (5.11).

Найдя характеристические корни и коэффициенты распределения, составляем общее решение системы двух линейных дифференциальных уравнений (5.6):

$$\xi(t) = B_1 \exp(\lambda_1 t) + B_2 \exp(\lambda_2 t), \quad (5.19,а)$$

$$\eta(t) = k_{21} B_1 \exp(\lambda_1 t) + k_{22} B_2 \exp(\lambda_2 t). \quad (5.19,б)$$

Произвольные постоянные B_1 и B_2 определяются из начальных условий.

$$B_1 + B_2 = \xi_{\text{нач}}, \quad (5.20,а)$$

$$k_{21} B_1 + k_{22} B_2 = \eta_{\text{нач}}. \quad (5.20,б)$$

Конечно, выражения общего решения (5.19,а), (5.19,б) можно было взять и непосредственно из найденных ранее трех временных решений 3-мерной системы $\xi(t)$, $\eta(t)$, $\mu(t)$ (3.14), оставив лишь два из них — $\xi(t)$ и $\eta(t)$;

мы дали эти выкладки как самостоятельные с целью закрепить понимание процедуры.

Обратимся теперь к выражениям (5.19,а), (5.19,б) временных решений $\xi(t)$ и $\eta(t)$. Располагая этими аналитическими выражениями, можем исключить из них время t и получить формулы для фазовых траекторий, связывающие одну из координат $\xi(t)$ или $\eta(t)$ с другой. Изложенный в предыдущем разделе способ исключения времени, по нашему мнению, более нагляден, чем распространенный в литературе способ формальной замены координат (его мы продемонстрируем в приложении).

Для исключения времени удобно перейти от исходных переменных $\xi(t)$ и $\eta(t)$ к так называемым *главным* (или *нормальным*) координатам $U(t)$ и $V(t)$. От исходных координат они выгодно отличаются тем, что каждая из них связана лишь с одним характеристическим показателем λ_1 или λ_2 , а не с двумя сразу, как в (5.19,а) и (5.19,б). В главных координатах выражения траекторий и их вид на фазовой поверхности получаются наиболее простыми и характерными, а вернуться к исходным переменным $\xi(t)$ и $\eta(t)$ можно при необходимости на любом этапе анализа.

Найдем главные координаты следующим простым способом, минуя общую их запись для 3-мерного случая, полученную в предыдущем разделе. Умножим все члены решения (5.19,а) на коэффициент распределения k_{22} и вычтем полученное выражение из (5.19,б). Тогда слагаемое с показателем ($\lambda_2 t$) исключается и для главной координаты $U(t)$ получаем

$$U(t) = \eta(t) - k_{22} \xi(t) = (k_{21} - k_{22}) B_1 \exp(\lambda_1 t). \quad (5.21)$$

Видим, что главная координата $U(t)$ изменяется во времени, подчиняясь действию лишь одного экспоненциального показателя ($\lambda_1 t$).

Теперь умножим все члены (5.19,а) на коэффициент k_{21} и снова вычтем полученное выражение из (5.19,б). При этом исключается слагаемое с показателем ($\lambda_1 t$) и для другой главной координаты $V(t)$ имеем движение с одним лишь показателем ($\lambda_2 t$)

$$V(t) = \eta(t) - k_{21} \xi(t) = (k_{22} - k_{21}) B_2 \exp(\lambda_2 t). \quad (5.22)$$

Возведем обе части (5.21) в степень λ_2 , а обе части (5.22) – в степень λ_1 . Тогда в правых частях каждого из них будет фигурировать одинаково меняющийся во времени множитель $\exp(\lambda_1 \lambda_2 t)$, который можно исключить, разделив одно выражение на другое. Таким образом, время t из этих выражений исчезает, и мы сразу приходим к записи фазовых траекторий в главных координатах

$$U^{\lambda_2} = C V^{\lambda_1}. \quad (5.23)$$

Здесь C – константа, включающая вычисленные характеристические показатели λ_1 и λ_2 , коэффициенты распределения k_{21} и k_{22} , а также постоянные B_1 и B_2 . Изменяя начальные условия $\xi_{\text{нач}}$, $\eta_{\text{нач}}$, мы меняем начальное положение изображающей точки на фазовой плоскости с координатами U, V .

Для удобства рассмотрения характера фазовых траекторий в главных координатах представим выражение одной из них через другую взамен (5.23) в наиболее наглядной, явной записи:

$$V = C U^{\lambda_2/\lambda_1}, \quad (5.24)$$

где C – новая константа.

Заметим, что найденные выражения двумерных траекторий в главных координатах непосредственно получаются из общих, полученных в предыдущем разделе для 3-х мерного случая

Из формулы (5.24) следует, что все возможные типы кривых $V(U)$ на плоскости главных координат определяются только отношением $\Lambda = (\lambda_2/\lambda_1)$ характеристических корней линеаризованной системы 2-го порядка. Эти корни мы нашли, решив характеристическое уравнение (5.10); их значения нельзя назначать произвольно, поскольку они даются выражением (5.13).

В исходных координатах ξ, η выражения фазовых траекторий выглядят так

$$[\eta - k_{22} \xi]^{\lambda_2} = C [\eta - k_{21} \xi]^{\lambda_1}. \quad (5.25)$$

Подчеркнем, что в формуле (5.23), как и в (5.24), коэффициенты распределения явно не участвуют, т.е. они не влияют на вид траекторий в главных координатах U, V – он зависит только от корней характеристического уравнения λ_1 и λ_2 . Напротив, вид фазовых траекторий в исходных координатах ξ, η определяется не только этими корнями, но также и коэффициентами распределения, что иногда затемняет самое важное в существе картины векторного поля траекторий. Поэтому можем легко и подробно изучать «геометрию» фазовых траекторий в главных координатах, а чтобы при необходимости вернуться к исходным, воспользуемся линейным (аффинным) преобразованием:

$$\xi = (V - U) / (k_{22} - k_{21}), \quad \eta = (k_{22} V - k_{21} U) / (k_{22} - k_{21}). \quad (5.26)$$

Видим, что переход от главных координат U, V к исходным ξ, η целиком определяется коэффициентами распределения.

Опираясь на формулу (5.13), проведем разбиение плоскости параметров A, B характеристического уравнения (5.10) по типу его корней; оно представлено на рис.2.



Рис. 2. Разбиение плоскости параметров характеристического уравнения по типу его корней.

На рис. 2 парабола $B = A^2/4$ отделяет вещественные корни от комплексно-сопряженных, причем при $A = 0, B > 0$ корни чисто мнимые. Если $B < A^2/4$, то корни действительные, а их знак противоположен знаку коэффициента A (то же самое справедливо в отношении знака действительной части комплексно-сопряженных корней при $B > A^2/4$). В левой полуплоскости ($B < 0$) корни действительные и разных знаков, причем при $A > 0$ корень $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$, а модуль их отношения $|\lambda_2 / \lambda_1| > 1$. При $A < 0$ получается $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ и модуль $|\lambda_2 / \lambda_1| < 1$.

Заметим, что из формулы для корней (5.13) видно, что в случае действительных корней всегда справедливо неравенство $\lambda_2 < \lambda_1$ независимо от их знаков (другими словами, на действительной оси корни расположены так, что λ_2 всегда оказывается левее λ_1). Об этом не следует забывать при попытке произвольного «назначения» отношения $\Lambda = (\lambda_2 / \lambda_1)$, хотя полученные при произвольных $\Lambda = (\lambda_2 / \lambda_1)$ фазовые портреты пополняют наше общее представление о картинах фазовых траекторий.

Рассмотрим теперь все возможные соотношения между корнями λ_2 и λ_1 .

Случай 1. Оба корня вещественны и отрицательны: $\lambda_2 < 0$, $\lambda_1 < 0$. Это возможно лишь в области $A > 0$, $B > 0$ и $B < A^2/4$, причем получается, что $|\lambda_1| < |\lambda_2|$. Отношение корней $(\lambda_2/\lambda_1) > 1$ и формула (5.24) дает нам при разных значениях C набор парабол с показателем степени $\Lambda = (\lambda_2/\lambda_1) > 1$. При изменении этого показателя параболические траектории деформируются. Семейство парабол для частного случая $\Lambda = 2$ (чисто «квадратичные» параболы) показано ниже на рис. 3.

Заметим, что кривые, просто построенные по формуле (5.24), пока еще не являются фазовыми траекториями – чтобы они превратились в траектории, на них должно быть указано направление движения изображающей точки с ростом времени. Это направление определяется из рассмотрения временных решений $U(t)$, $V(t)$ – по формулам (5.21), (5.22) обе эти переменные экспоненциально убывают с ростом времени, поскольку $\lambda_2 < 0$, $\lambda_1 < 0$. Значит, стрелки нужно направить от периферии к началу координат рис. 3. При этом все движения, начавшиеся в любом месте фазовой плоскости, заканчиваются при $t \rightarrow \infty$ в точке $U^0 = V^0 = 0$. Эта точка устойчивого равновесия является особой – в ней сходятся все фазовые траектории (иначе говоря, через нее проходит бесконечное число траекторий). Через любую другую точку фазовой плоскости рис. 3 проходит единственная траектория, как и должно быть в силу теоремы о единственности решения.

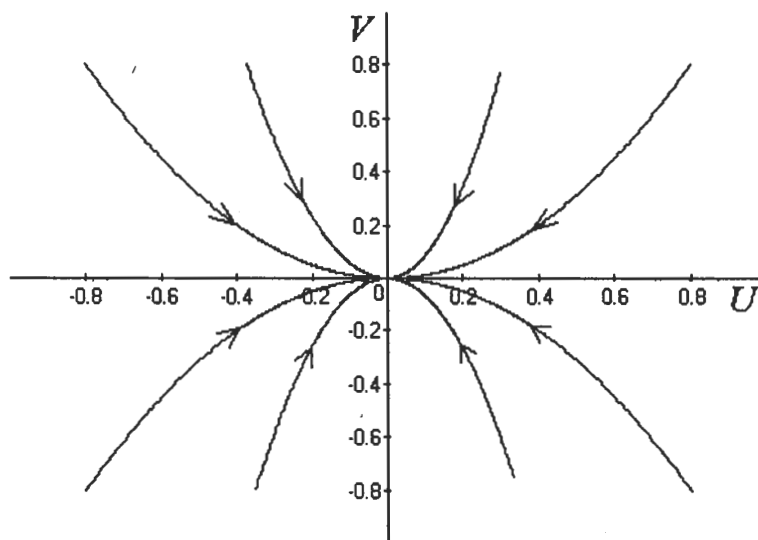


Рис. 3. Фазовые траектории в окрестности особой точки типа *устойчивый узел*; отношение корней $\Lambda = (\lambda_2/\lambda_1) = 2$.

Анри Пуанкаре впервые дал классификацию особых точек по виду фазовых траекторий, в их окрестности. Он назвал подобную картину параболических траекторий, приходящих к устойчивому состоянию равновесия, *устойчивым узлом* (вероятно, по аналогии с пучком волос, туго перевязанных узлом).

Заметим, что на рис. 3 прямые, совпадающие с осями координат U и V , также являются фазовыми траекториями – изображающая точка, помещенная первоначально на ось V , движется в дальнейшем по этой оси к началу координат в соответствии с найденным ранее выражением (5.22) для $V(t)$.

Если же начальные условия такие, что изображающая точка была помещена вначале на ось U , то дальнейшее ее движение будет происходить по этой же оси к началу координат по экспоненциальному закону (5.21) для $U(t)$.

Полученные ранее выражения (5.21) и (5.22) полезны, если мы захотим рассмотреть траектории устойчивого узла не в главных координатах, как на рис. 3, а перейти к исходным координатам $\eta(t)$ и $\xi(t)$. Выражение для оси V в исходной системе координат получим, полагая $U = 0$, что дает

$$\text{Ось } V: \quad \eta_v = k_{22} \xi. \quad (5.27)$$

Аналогичным образом, положив $V = 0$, находим выражение для оси U в исходных координатах

$$\text{Ось } U: \quad \eta_u = k_{21} \xi. \quad (5.28)$$

Иногда две эти прямые называют «усами» узла, их наклон определяет степень перекоса симметричных парабол рис.3 при переходе от главных координат U, V к исходным координатам η, ξ .

Картина траекторий устойчивого узла в координатах η, ξ показана на рис. 4, причем для упрощения построения принято, что значения коэффициентов распределения k_{21} и k_{22} совпадают со значениями характеристических корней λ_1 и λ_2 , соответственно. Видны «усы узла» – две прямые с угловыми коэффициентами $k_{21,22}$.

Чтобы получить $k_{21} = \lambda_1, k_{22} = \lambda_2$, нужно в (5.17) принять элементы двумерной матрицы A следующими: $a_{11} = 0, a_{12} = 1$. Интересно отметить, что в этом случае линеаризованные уравнения движения принимают так называемую *осцилляторную* форму – взамен записи двух уравнений 1-го порядка в форме Коши

$$d\xi/dt = a_{11}\xi + a_{12}\eta, \quad d\eta/dt = a_{21}\xi + a_{22}\eta. \quad (5.29)$$

Их можно записывать в виде одного уравнения 2-го порядка

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} - a_{22} \frac{d\xi}{dt} - a_{21}\xi = 0, \quad (5.30)$$

которое при $a_{21} < 0$, $a_{22} < 0$ соответствует уравнению линейного электрического LRC колебательного контура (*осциллятора*) с потерями, или механического (пружинного) маятника, движущегося в вязкой среде. Для последовательного контура слагаемые в (5.30) представляют напряжения на индуктивности L , сопротивлении r и конденсаторе C , соответственно. В случае механической маятника это, соответственно, сила инерции, сила трения и сила упругости; другими словами, имеем Ньютон закон движения линейной системы с одной степенью свободы. Поэтому, имея дело с одним уравнением 2-го порядка (5.30), иногда говорят о «Ньютоновой» форме записи уравнения движения. Мы будем называть этот случай ($a_{11} = 0$, $a_{12} = 1$) просто системой 2-го порядка «частного вида».

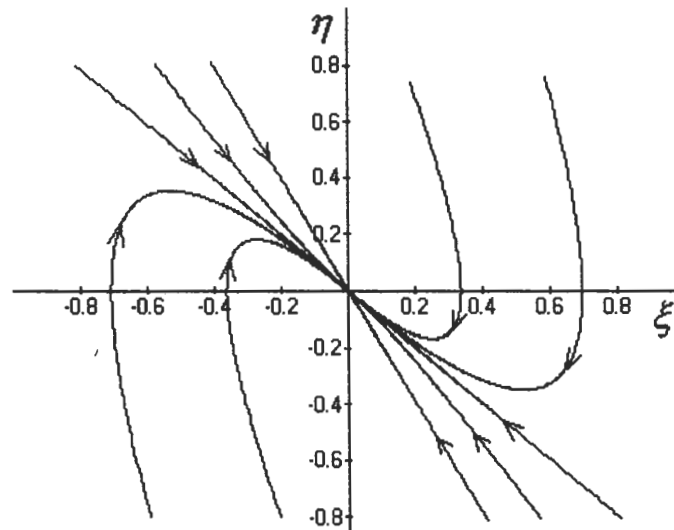


Рис. 4. Траектории в окрестности особой точки типа *устойчивый узел*, построенные в исходных координатах (ξ, η) . Параметры $\lambda_1 = k_{21} = -1$, $\lambda_2 = k_{22} = -2$.

При подробном построении траекторий в исходных координатах ξ, η полезно использовать известный из курса «Теория колебаний» *метод изоклин*. *Изоклиной* называется геометрическое место точек (в 2-мерном случае это некоторая кривая), на котором угловой коэффициент касательных к траекториям сохраняет постоянное значение, т.е. $d\eta/d\xi = \chi = \text{const}$. Для

линейной модели выражение углового коэффициента $d\eta/d\xi$ получается из системы (5.29) в очень простом виде

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{a_{21}\xi + a_{22}\eta}{a_{11}\xi + a_{12}\eta}. \quad (5.31)$$

Положив в левой части $d\eta/d\xi = \chi = \text{const}$, имеем выражение для изоклины с угловым коэффициентом χ

$$\eta_\chi = \frac{a_{21} - \chi a_{11}}{\chi a_{12} - a_{22}} \xi. \quad (5.32)$$

Видим, что семейство изоклин с разными угловыми коэффициентами $\chi = \text{const}$ представляет пучок прямых, проходящих через начало координат $\xi = \eta = 0$, которое соответствует рассматриваемой точке равновесия. Снова убеждаемся, что равновесное состояние – особая точка, поскольку в ней пересекаются все возможные изоклины и угловой коэффициент касательных к траектории в ней не определен.

Заметим, что из (5.32) можно иным способом найти угловые коэффициенты прямых, проходящих через особую точку (эти прямые, естественно, и есть оси координат U, V). Очевидно, что угловой коэффициент фазовой траектории в виде прямой, проходящей через начало координат, совпадает с угловым коэффициентом χ касательной к этой прямой. Тогда из (5.32) вытекает квадратное уравнение для χ :

$$a_{12} \chi^2 + (a_{11} - a_{22}) \chi - a_{21} = 0, \quad (5.33)$$

откуда получаем, после сопоставления с (5.17), равенство

$$\chi_{1,2} = k_{1,2}. \quad (5.34)$$

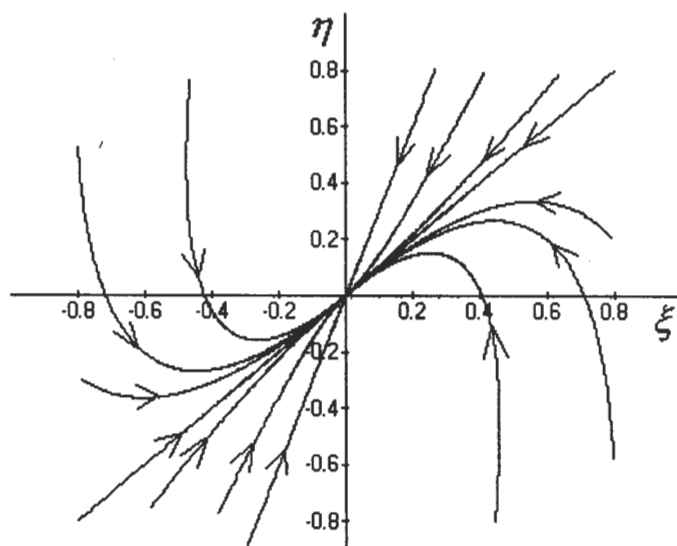
В случае системы «частного вида» (5.30), когда $a_{11} = 0, a_{12} = 1$, взамен (5.32) имеем

$$\eta_\chi = \frac{a_{21}}{\chi - a_{22}} \xi, \quad (5.35)$$

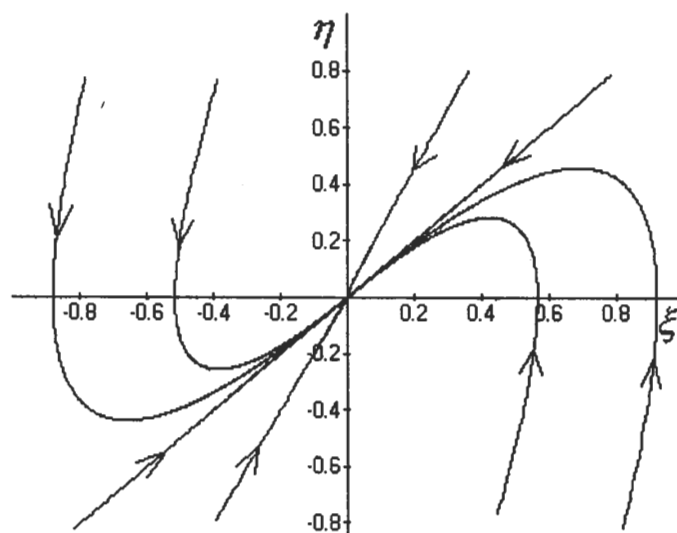
а из (5.33) получается, что

$$\chi_{1,2} = \lambda_{1,2}. \quad (5.36)$$

Значит, для системы «частного вида» угловые коэффициенты осей главных координат $U = 0$, $V = 0$, наблюдаемых в исходных координатах ξ , η , совпадают с значениями корней характеристического уравнения. Это обстоятельство помогает при перестройке картин траекторий из главных координат в исходные.



а) $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, $k_{21} = 1$, $k_{22} = 3$



б) : $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, $k_{21} = 1$, $k_{22} = 2$

Рис. 5. Траектории в окрестности устойчивого узла.

Чтобы показать влияние коэффициентов распределения (при неизменных характеристических корнях) на вид траекторий, на рис. 5,а и б приведены еще два фазовых портрета для особой точки типа устойчивого узла, причем значения λ_1 и λ_2 сохранены теми же, что и на рис. 4, а значения k_1 и k_2 выбраны иными.

Если внимательно присмотреться и сопоставить картины траекторий на рис. 4 и рис. 5, то можно установить на каждом из них наличие двух прямых линий («усов узла», соответствующих главным координатам U, V), определяемых формулами (5.27)–(5.28), с угловыми коэффициентами, равными коэффициентам распределения. Характер параболических кривых, примыкающих к этим прямым, сохраняется примерно одинаковым на всех трех рассматриваемых рисунках – он определяется корнями характеристического уравнения, которые мы сохранили неизменными.

Выясним, как изменятся траектории в окрестности устойчивого узла в случае равных корней характеристического уравнения $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda < 0$. В этом случае, как следует из выражения (5.23) для главных координат U, V , все траектории принимают вид прямых линий, или «лучей», проходящих через начало координат. За такой внешний вид эту особую точку называют звездообразным узлом, ее фазовый портрет дан на рис. 6.

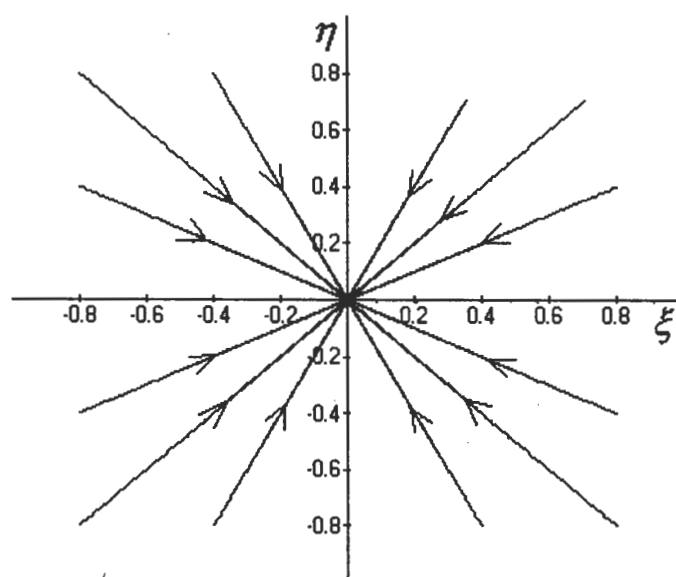


Рис. 6. Фазовые траектории в окрестности звездообразного устойчивого узла в случае равных корней характеристического уравнения.

Рассмотрим случай сильно различающихся корней характеристического уравнения $|\lambda_2| \gg |\lambda_1|$, $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$. Траектории в окрестности устойчивого узла с таким соотношением характеристических

корней ($\lambda_1 = k_{12} = -0.1$; $\lambda_2 = k_{22} = -10$) показаны на рис.7; иногда подобный узел называют вырожденным. Видно, что угловой коэффициент касательных к траекториям близок к величине $\lambda_2 = k_{22} = -10$ почти всюду на фазовой плоскости (ξ, η), за исключением области вблизи «уса узла» с угловым коэффициентом, равным $\lambda_1 = k_{12} = -0.1$.

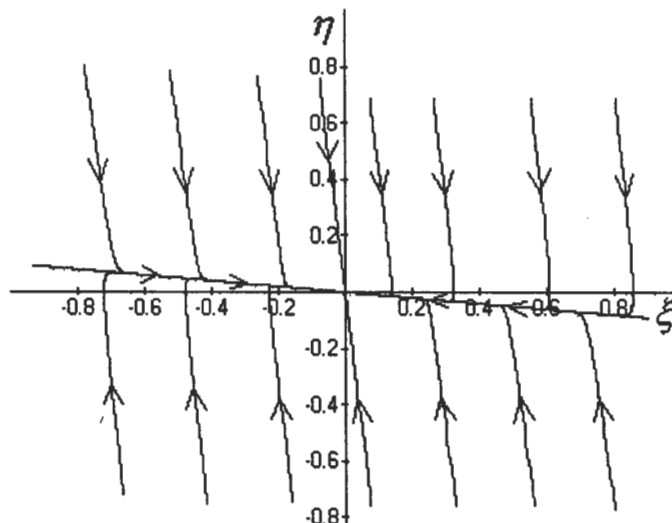


Рис. 7. Фазовые траектории в окрестности *вырожденного устойчивого узла*.
 Параметры: $\lambda_1 = -0.1$, $\lambda_2 = -10$, $k_{21} = 0.1$, $k_{22} = 10$

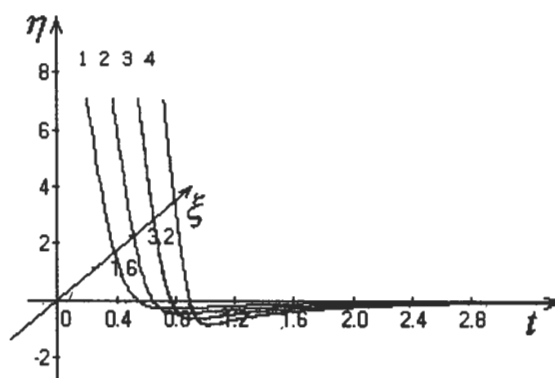


Рис. 8. Временные решения $\xi(t)$ и $\eta(t)$ для случая сильно различающихся корней характеристического уравнения: $\lambda_1 = -0.1$; $\lambda_2 = -10$. Заметны участки быстрых и медленных движений в случае вырожденного устойчивого узла. Начальные условия: $\xi_{нач} = 1, 2, 3, 4$; $\eta_{нач} = 8$ (для всех четырех реализаций).

Во временном представлении (рис. 8) вся фазовая плоскость вне этой области соответствует быстрым движениям, которые идут экспоненциально во времени с показателем экспоненты, равным характеристическому корню $\lambda_2 = -10$. Быстрые движения приводят систему за короткое время в область медленных движений, примыкающую непосредственно к «усу узла» с угловым коэффициентом, равным корню $\lambda_1 = -0,1$. Далее система медленно движется к состоянию равновесия по экспоненциальному закону с показателем экспоненты λ_1 .

Перейдем к рассмотрению траекторий в случае двух положительных корней характеристического уравнения.

Случай 2: Оба корня $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$. Для действительных корней, как мы специально указывали выше, обязательно выполняется условие $\lambda_1 > \lambda_2$. Тогда отношение корней получается $\Lambda = (\lambda_2 / \lambda_1) < 1$. Значит, траектории в случае положительных корней будут парабололами степени меньше единицы (в случае отрицательных корней это были параболы степени больше единицы). Картина траекторий для $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ показана на рис. 9 в главных координатах U, V , а в исходных координатах ξ, η – на рис. 10. Поскольку корни положительные, обе координаты U, V экспоненциально нарастают во времени. Такую картину А. Пуанкаре назвал *неустойчивым узлом*.

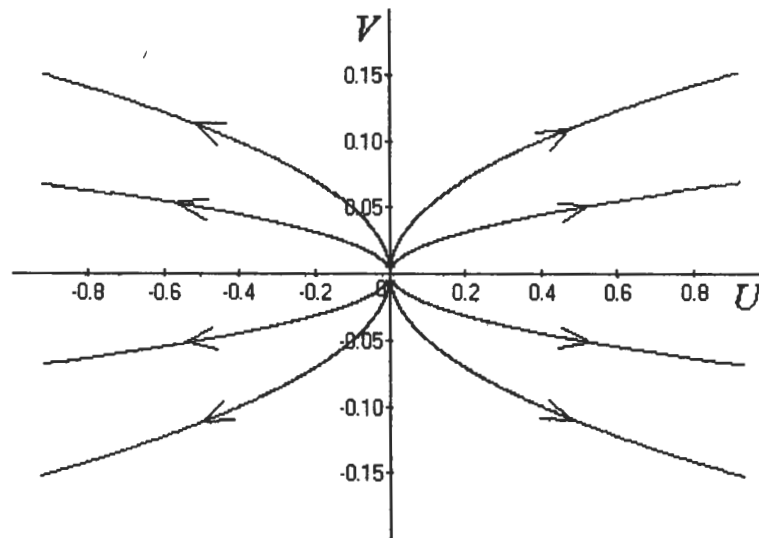


Рис. 9. Фазовые траектории типа *неустойчивого узла* в главных координатах (U, V).
Отношение корней $\Lambda = \lambda_2 / \lambda_1 = 0.5$.

Следует отметить, что смена знака обоих вещественных корней характеристического уравнения меняет не только направление движения

изображающей точки по фазовым траекториям (теперь они уходят от начала координат с ростом времени) – меняются и некоторые детали этих траекторий в исходных координатах. Однако, сам тип кривых сохраняется – они представляют собой более или менее деформированные параболы степени $\Lambda = (\lambda_2 / \lambda_1) < 1$.

В рассмотренных двух случаях оба вещественные корни располагались либо каждый слева, либо каждый справа относительно начала координат; при этом траектории представляли собой параболические кривые. По этой причине особые точки с таким расположением корней называют иногда особыми точками параболического типа. Расширив эту терминологию на общий случай системы N -го порядка, состояние равновесия относят к параболическому типу если все N вещественных корней характеристического уравнения располагаются по одну сторону от начала координат на плоскости характеристических корней.

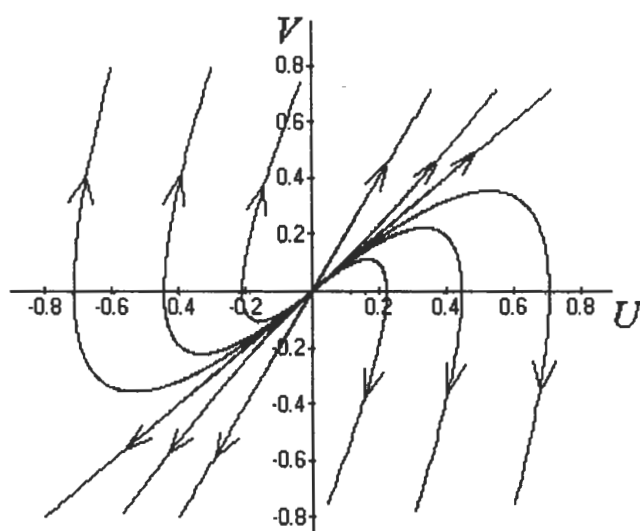


Рис. 10. Картина траекторий типа неустойчивого узла в исходных координатах.
 Параметры: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $k_{21} = 2$, $k_{22} = 1$.

Случай 3: Корни действительные и разных знаков, причем, согласно формуле (5.13), положителен обязательно корень λ_1 , а корень λ_2 – отрицателен. Главная координата $U \equiv \exp(\lambda_1 t)$, т.е. экспоненциально нарастает во времени, а главная координата $V \equiv \exp(\lambda_2 t)$, наоборот, убывает во времени по экспоненциальному закону. Ясно, что такое состояние равновесия неустойчиво.

Отношение корней $\Lambda = \lambda_2 / \lambda_1 < 0$ и фазовая траектория теперь представляет собой гиперболу

$$V = C U^{\lambda_2/\lambda_1} = C U^{-|\Lambda|} \quad (5.37)$$

Возможны три варианта: $\lambda_1 > |\lambda_2|$, $\lambda_1 = |\lambda_2|$ и $\lambda_1 < |\lambda_2|$, т.е. могут быть три значения показателя гиперболы $|\Lambda| < 1$, $|\Lambda| = 1$ и $|\Lambda| > 1$. Эти варианты различаются лишь темпами роста или убывания каждой из главных координат, что проявляется в характере деформации гипербол – при $|\Lambda| = 1$ имеем симметричную по отношению к осям U, V гиперболу, а при $|\Lambda| < 1$ и $|\Lambda| > 1$ гипербола теснее примыкает к какой-либо из осей U или V .

На рис. 11 построено семейство гипербол по формуле (5.37) для отношения корней $|\Lambda| = 2$; гиперболы теснее прижаты к горизонтальной оси, соответствующей главной координате $U \equiv \exp(\lambda_1 t)$, чем к вертикальной оси $V \equiv \exp(\lambda_2 t)$.

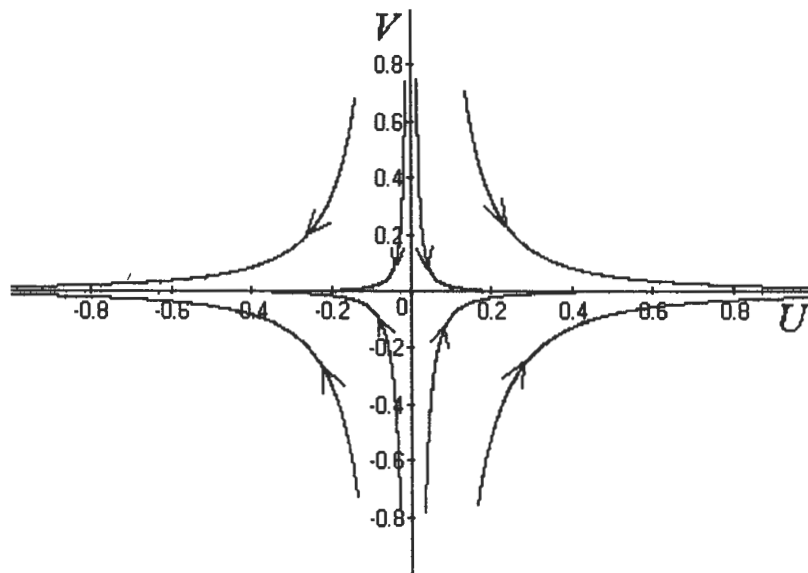


Рис.11. Фазовые траектории в окрестности *седловой* точки, построенные в главных координатах. Отношение корней $|\Lambda| = 2$.

Картина траекторий рис. 11 напоминает линии равных уровней при сечении горного хребта вблизи точки перевала («седла») горизонтальными плоскостями. По аналогии А. Пуанкаре назвал такую точку равновесия *седловой*, или просто *седлом*.

Оси U, V главных координат седла являются особыми траекториями – они проходят через саму точку равновесия. Значит, эта точка особая, в ней имеем два значения углового коэффициента касательных к фазовым траекториям: U и V – 0° и 90° , соответственно.

Выходящая особая траектория, т.е. ось U , оказывается притягивающим множеством для всех остальных траекторий за исключением входящей в седло траектории, т.е. оси V . Иногда удобнее разделять каждую из особых траекторий на две *полутраектории* – положительную и отрицательную. Тогда две входящих в седло полутраектории, т.е. положительная и отрицательная полуоси V , представляют собой границы, разделяющие бассейны притяжения каждой из выходящих полутраекторий. Поэтому ось V называют *сепаратриссой* и разбивают ее на две входящих в седло *полусепаратриссы* – положительную и отрицательную. Хотя ось U – притягивающее множество, ее по традиции также часто называют *выходящей сепаратриссой*. Иногда все точки входящей в седловую точку полусепаратриссы называют *устойчивым многообразием*, а все точки *выходящей сепаратриссы* – *неустойчивым многообразием*, поскольку именно с ними связан «уход» от равновесия.

На рис. 12 фазовые траектории в окрестности седла представлены в исходных координатах ξ, η для $|\Lambda| = |\lambda_2/\lambda_1| = 0.5$, а на рис. 13 – для $|\Lambda| = |\lambda_2/\lambda_1| = 2$. Эти картины различаются лишь тем, что на рис. 12 поле траекторий повернуто влево, а на рис. 13 вправо от симметричной картины траекторий седла, представленной на рис. 14 для отношения корней $|\Lambda| = |\lambda_2/\lambda_1| = 1$.

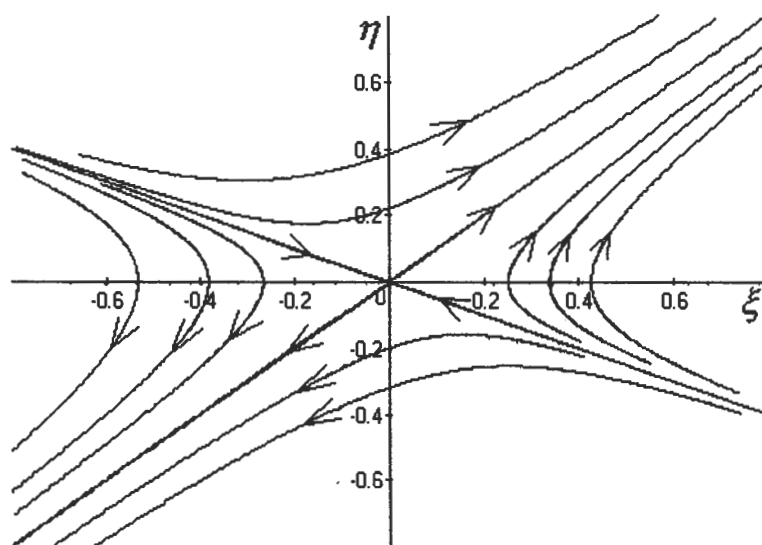


Рис. 12. Фазовые траектории в окрестности седла, построенные в исходных координатах для отношения корней $|\Lambda| = |\lambda_2/\lambda_1| = 0.5$ (левое седло)

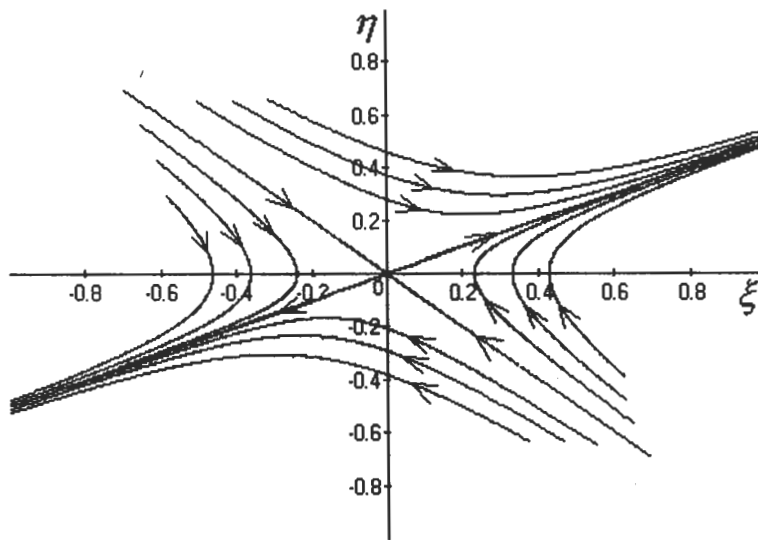


Рис. 13. Фазовые траектории в окрестности седловой точки, построенные в исходных координатах для отношения корней $|\Lambda| = |\lambda_2/\lambda_1| = 2$ (правое седло).

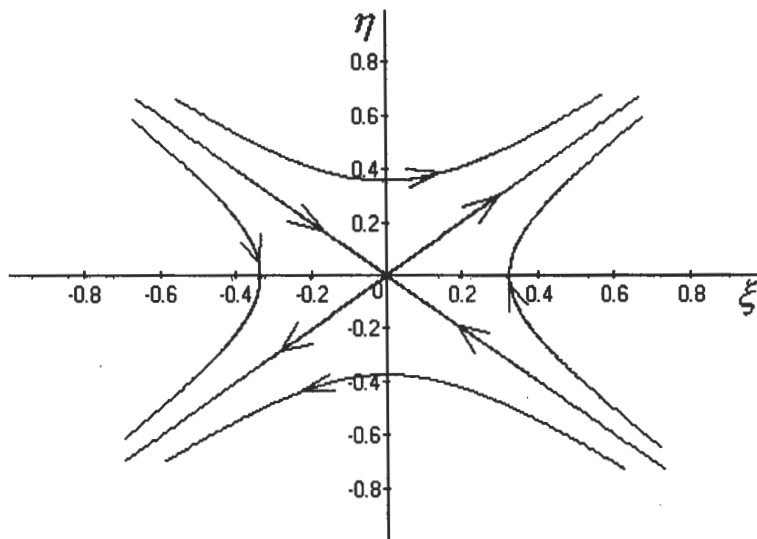


Рис. 14. Фазовые траектории в окрестности симметричного седла (отношение корней $|\Lambda| = |\lambda_2/\lambda_1| = 1$).

Такое седло называют иногда *симметричным*, здесь угловые коэффициенты входящей и выходящей сепаратрис равны по модулю и противоположны по знаку. Ясно, что тип седла (левое, правое или симметричное) на общий характер динамических процессов вблизи седловой точки равновесия не влияет.

В случае седла вещественные корни расположены по разные стороны относительно начала координат; траектории при этом получаются в виде гиперболических кривых. Поэтому особые точки с таким расположением корней называют *гиперболическими*. Такой терминологии придерживаются и в общем случае системы N -го порядка, т.е. у седловой (или гиперболической) точки равновесия m штук корней характеристического уравнения имеют действительные части слева, а оставшиеся $(N - m)$ корней — справа относительно начала координат.

Перейдем теперь к рассмотрению траекторий при комплексно-сопряженных корнях характеристического уравнения $\lambda_{1,2} = \lambda_b \pm j\lambda_m$. На плоскости коэффициентов A, B (рис. 2) характеристического уравнения (5.11) такие корни соответствуют условию $B > A^2/4$. Обратим внимание на то, что, согласно формуле (5.17), если характеристические корни комплексно-сопряженные, то и коэффициенты распределения также комплексно-сопряженные, т.е. $k = k_b \pm j k_m$.

Случай 4. Корни комплексно-сопряженные $\lambda_{1,2} = \lambda_b \pm j\lambda_m$. Отметим, что величина $\lambda_m > 0$ всегда, а что касается знака λ_b , то на плоскости коэффициентов A, B значения $\lambda_b < 0$ соответствуют сегменту между параболой $B = A^2/4$ и осью абсцисс при $A > 0$ (аналогичный сегмент при $A < 0$ «занят» положительными значениями $\lambda_b > 0$).

При комплексно-сопряженных величинах $\lambda_{1,2} = \lambda_b \pm j\lambda_m$ и $k = k_b \pm j k_m$ непосредственное использование формулы (5.25) для записи фазовых траекторий в исходных координатах ξ, η дает неудобное выражение

$$(\xi - k_b \eta - j k_m \eta)^{\lambda_b + j\lambda_m} = C (\xi - k_b \eta + j k_m \eta)^{\lambda_b - j\lambda_m}, \quad (5.38)$$

т.е. главные координаты получились комплексными! Гораздо нагляднее воспользоваться взамен них полярными координатами ρ, φ , проведя следующую замену переменных

$$(\xi - k_b \eta - j k_m \eta) = \rho \exp(-j\varphi) = \rho \cos \varphi - j \rho \sin \varphi, \quad (5.39, a)$$

$$(\xi - k_b \eta + j k_m \eta) = \rho \exp(+j\varphi) = \rho \cos \varphi + j \rho \sin \varphi, \quad (5.39, б)$$

где $\rho \cos \varphi = \xi - k_b \eta$, $\rho \sin \varphi = k_m \eta$.

После подстановки (5.39,а)-(5.39,б) в (5.25) и преобразований получаем чрезвычайно простое выражение для фазовых траекторий в полярной системе координат

$$\rho = \rho_0 \exp\left(\frac{\lambda_b}{\lambda_m} \varphi\right). \quad (5.40)$$

Здесь ρ_0 — новая произвольная постоянная. Выражение (5.40) есть уравнение логарифмической спирали; если $\lambda_b > 0$, то спирали с ростом полярного угла φ

раскручиваются от начала координат, а при $\lambda_b < 0$ они скручиваются к началу координат. Если $\lambda_b = 0$, то (5.40) превращается в уравнение окружности $\rho = \rho_0$.

Картину траекторий в виде логарифмических спиралей (5.40) при $\lambda_b \neq 0$ называют *фокусом* (устойчивым при $\lambda_b < 0$ и неустойчивым при $\lambda_b > 0$). В случае $\lambda_b = 0$ фокус переходит в *центр* (оба эти термина принадлежат А. Пуанкаре).

Фазовые траектории в окрестности устойчивого фокуса показаны на рис. 15. На следующем рис. 16 приведены траектории неустойчивого фокуса, в отличие от предыдущего рисунка здесь изменен лишь знак перед вещественной частью характеристического корня. В обоих случаях принято для простоты, что $\lambda_b = k_b$, $\lambda_m = k_m$.

Траектории в окрестности центра, т.е. при $\lambda_b = 0$, показаны на рис. 17; это семейство вложенных друг в друга окружностей (или эллипсов). Ясно, что в случае центра система консервативна и вложенная в нее при $t = 0$ энергия сохраняется неизменной, с течением времени происходит лишь переход кинетической энергии в потенциальную и обратно (легко доказать, что площадь эллипса пропорциональна полной энергии). В случае устойчивого фокуса начальная энергия уменьшается, расходуясь на преодоление потерь в системе. Для неустойчивого фокуса картина обратная – энергия накачивается в систему за счет сторонних источников (это скрыто в коэффициентах a_{ij} переходной матрицы).

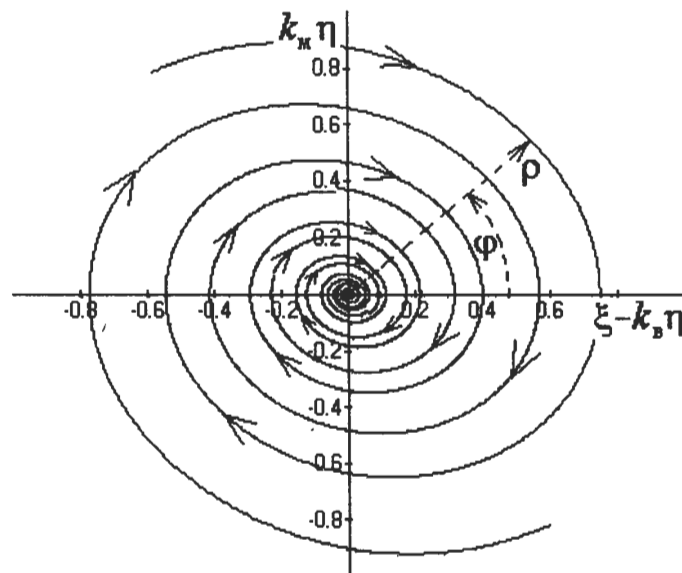


Рис. 15. Траектории в окрестности устойчивого фокуса;
 $\lambda_b = k_b = -0.1$, $\lambda_m = k_m = 1$.

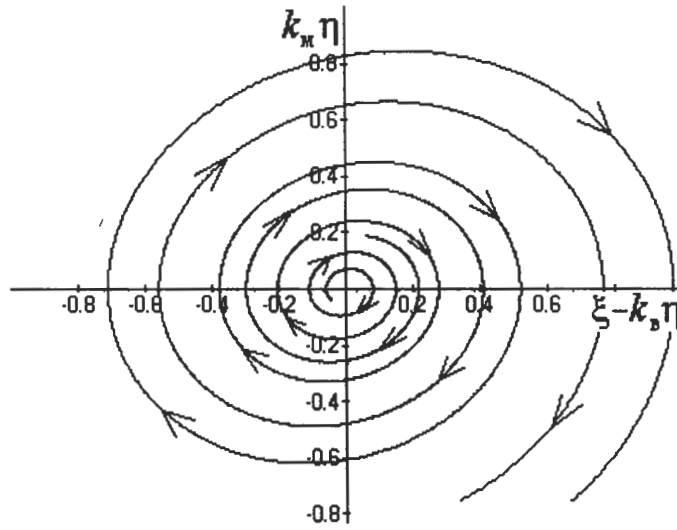


Рис. 16. Траектории в окрестности неустойчивого фокуса;
 $\lambda_B = k_B = +0.1, \lambda_M = k_M = 1.$

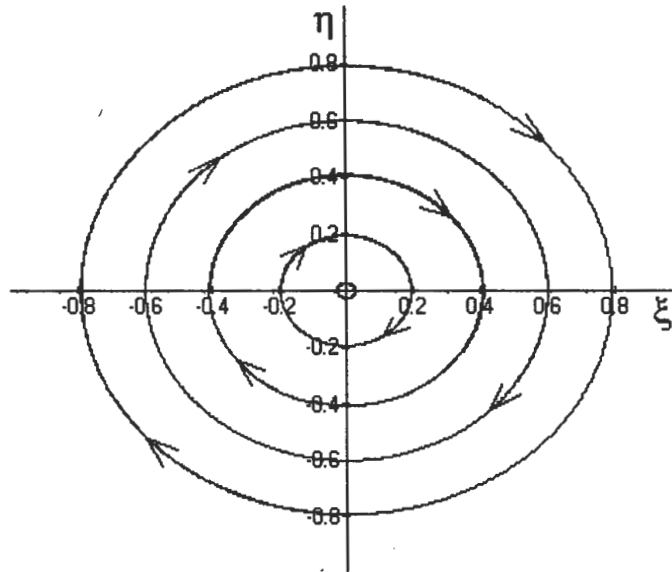


Рис. 17. Фазовые траектории в окрестности центра; $\lambda_B = 0, \lambda_M = 1, k_B = -1, k_M = 0.$

Таким образом, мы рассмотрели все возможные сочетания типов корней характеристического уравнения и выявили все типы картин фазовых

траекторий в окрестностях особых точек для линейной системы 2-го порядка, т.е. на фазовой плоскости.

Ранее мы неоднократно подчеркивали, что соотношение между характеристическими показателями λ_1 и λ_2 главных координат $U = \exp(\lambda_1 t)$ и $V = \exp(\lambda_2 t)$ не должно назначаться произвольно, поскольку оно полностью определяется корнями характеристического уравнения (5.13). Однако, для полноты описания в завершение данного раздела приведем полный набор картин фазовых траекторий в главных координатах $U = \exp(\alpha t)$, $V = \exp(\beta t)$ при произвольных соотношениях между характеристическими показателями α и β .

Этот набор показан на рис. 18 для случая вещественных показателей α и β . Здесь плоскость характеристических показателей (α, β) накрыта пучком прямых $\beta = k\alpha$, проходящих через начало координат с разными угловыми коэффициентами k , принимающими различные значения, как положительные, так и отрицательные. На периферии рисунка каждый из лучей пучка заканчивается небольшим чертежом, дающим картину фазовых траекторий для данного значения коэффициента k . Поскольку при $k = 0$ и $k = \infty$ картины вырождаются, соответствующие лучи заканчиваются расщеплением на пару примыкающих к этим значениям невырожденных фазовых портрета. Заштрихованная часть плоскости характеристических показателей дает область, где характеристические показатели соответствуют корням характеристического уравнения: $\alpha = \lambda_1$, $\beta = \lambda_2$. Иначе говоря, портреты в оставшейся части плоскости не реализуются (при введенных ранее обозначениях корней характеристического уравнения $\lambda_{1,2}$ и главных координат U, V).

Следующий рис. 19 выполнен таким же образом, но для случая комплексно-сопряженных характеристических показателей, когда фазовые траектории удобно представлять в полярных координатах (ρ, φ) . При этом они представляют собой логарифмические спирали $\rho = C \exp[(\alpha/\beta)\varphi]$, где α, β — действительные числа (как положительные, так и отрицательные). Снова заштрихована часть плоскости, в которой числа α, β связаны с комплексно сопряженными корнями $\lambda_{1,2}$ характеристического уравнения соотношением: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$.

На этом можно считать завершенной задачу построения фазовых траекторий в окрестностях особых точек заданной системы нелинейных дифференциальных уравнений 2-го порядка. Прежде чем перейти к рассмотрению системы 3-го порядка, дадим иную постановку вопроса о построении фазовых траекторий.

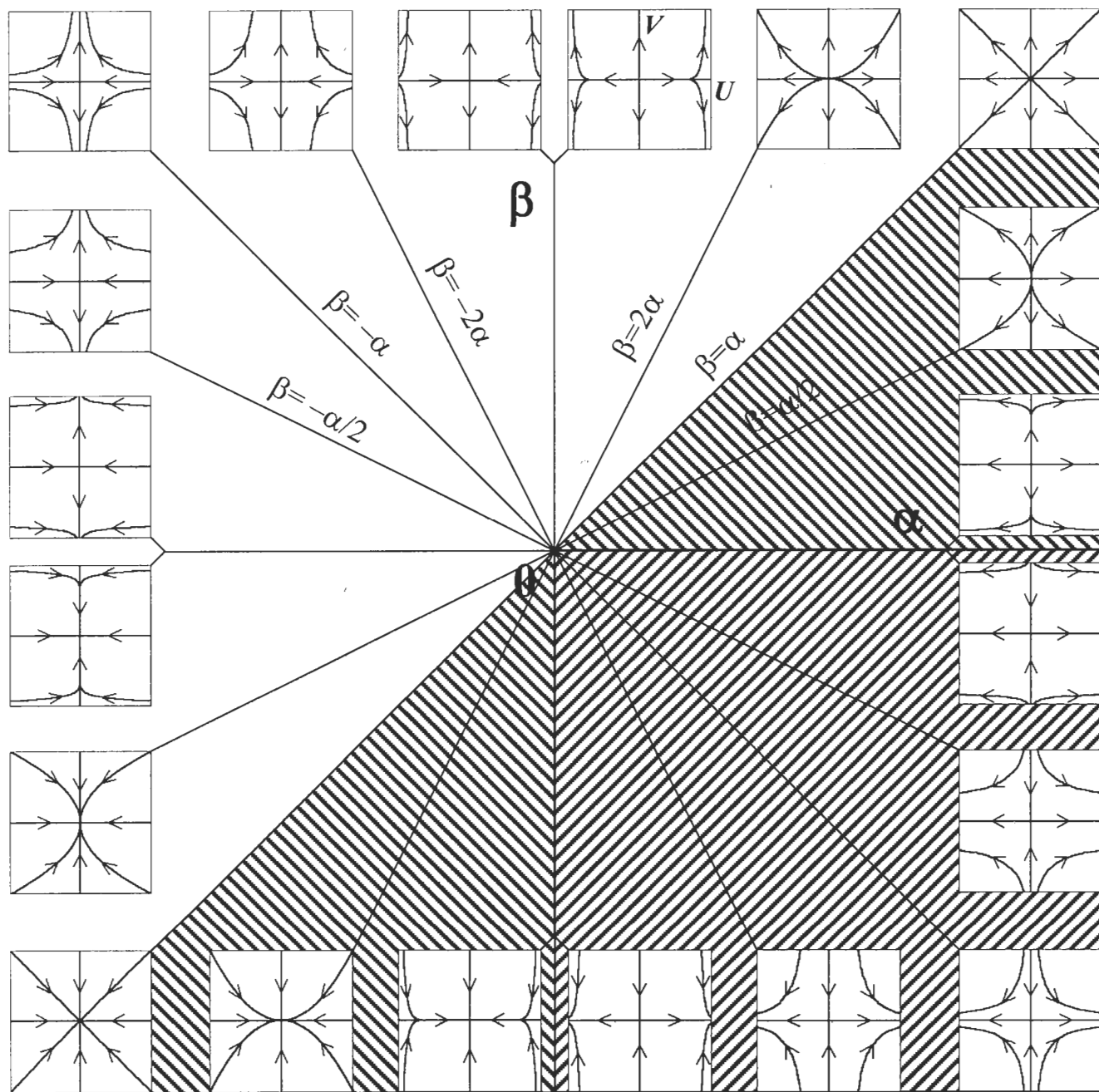


Рис.18. Разбиение плоскости характеристических показателей по типам движений, представленных в главных координатах (заштрихована область, где характеристические показатели соответствуют вещественным корням характеристического уравнения $\alpha = \lambda_1, \beta = \lambda_2$).

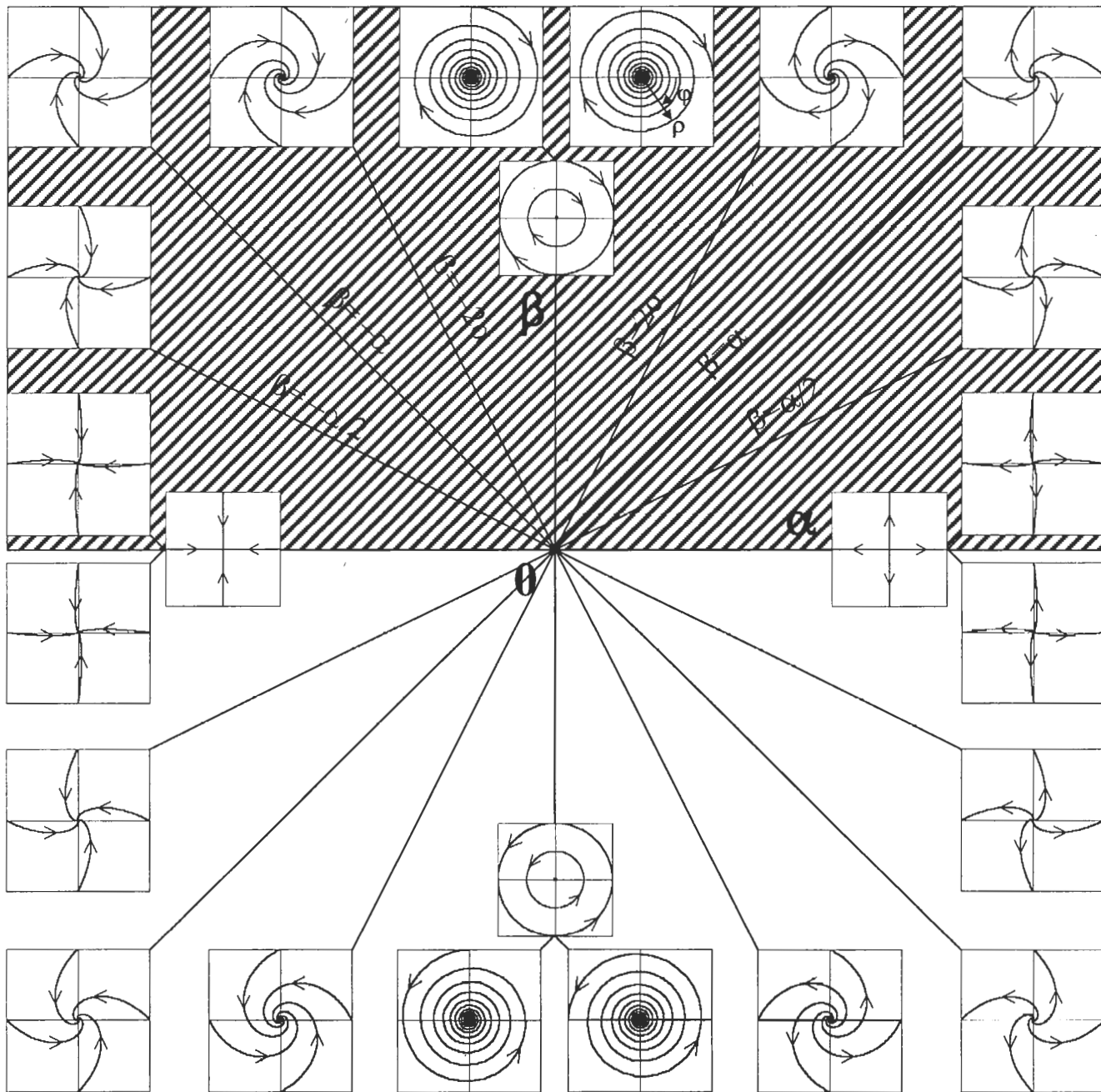


Рис.19. Движения на плоскости полярных координат (ρ, θ) , определяемые уравнением логарифмических спиралей $\rho = C \cdot \exp[(\alpha/\beta)\theta]$, где α, β – действительные числа.

хар. корни $\lambda_{1,2}$ - влияние на характер устойчивости особой точки
 коэф. распределения $k_{21,22}$ - картина траекторий в исходных координатах деформируется.

6. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПОЛЯ ФАЗОВЫХ ТРАЕКТОРИЙ НА ПЛОСКОСТИ

Обычно в учебных руководствах исходят из того, что известны коэффициенты a_{ij} матрицы состояния линеаризованной системы (3/4) и требуется найти по этим коэффициентам корни характеристического уравнения $\lambda_{1,2}$ и коэффициенты распределения $k_{21,22}$. ~~Здесь мы~~ ^{Теперь} поставим и решим «обратную задачу» – считаем выбранными значения корней $\lambda_{1,2}$ и коэффициентов $k_{21,22}$, а требуется найти коэффициенты a_{ij} матрицы состояния. Такая (обратная) задача может представлять интерес при изучении влияния корней $\lambda_{1,2}$ и коэффициентов $k_{21,22}$ на вид поля фазовых траекторий в окрестностях особых точек (например, можно зафиксировать значения корней $\lambda_{1,2}$ и варьировать коэффициенты распределения $k_{21,22}$ – при этом характер устойчивости особой точки не меняется, а картина траекторий в исходных координатах ξ, η деформируется).

Получить выражения a_{ij} через известные $\lambda_{1,2}$ и $k_{21,22}$ можно несколькими способами, проще всего обратиться к формулам для коэффициентов распределения

$$k_{21,22} = \frac{\lambda_{1,2} - a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{21}}{\lambda_{1,2} - a_{22}}. \quad (6.1)$$

Используя первое из соотношений (5.15), получим два уравнения для a_{11} и a_{12}

$$a_{11} + a_{12}k_{21} = \lambda_1, \quad a_{11} + a_{12}k_{22} = \lambda_2. \quad (6.2)$$

Отсюда находим выражения a_{11} и a_{12} через $\lambda_{1,2}$ и $k_{21,22}$

$$a_{11} = \frac{k_{22}\lambda_1 - k_{21}\lambda_2}{k_{22} - k_{21}}, \quad a_{12} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{k_{22} - k_{21}}. \quad (6.3)$$

Теперь воспользуемся вторым из соотношений (5.15), оно дает два уравнения для отыскания a_{21} и a_{22}

$$a_{21} + a_{22}k_{21} = k_{21}\lambda_1, \quad a_{21} + a_{22}k_{22} = k_{22}\lambda_2. \quad (6.4)$$

Разрешая (6.4) относительно a_{21} и a_{22} , получаем

$$a_{21} = \frac{k_{21}k_{22}(\lambda_1 - \lambda_2)}{k_{22} - k_{21}}, \quad a_{22} = \frac{k_{22}\lambda_2 - k_{21}\lambda_1}{k_{22} - k_{21}}. \quad (6.5)$$

Дадим для полноты картины также формулы отыскания коэффициентов a_{ij} в случае комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения $\lambda_{1,2} = \lambda_B \pm j\lambda_M$, коэффициенты распределения в этом случае также комплексно сопряжены $k_{1,2} = k_B \pm j k_M$. Их подстановка в формулы (6.3), (6.5) дает

$$a_{11} = \frac{\lambda_B k_M - \lambda_M k_B}{k_M}, \quad (6.6, a)$$

$$a_{12} = \frac{\lambda_M}{k_M}, \quad (6.6, б)$$

$$a_{21} = -\frac{(k_B^2 + k_M^2)\lambda_M}{k_M}, \quad (6.6, в)$$

$$a_{22} = \frac{\lambda_B k_M + \lambda_M k_B}{k_M}. \quad (6.6, г)$$

Для динамической системы частного вида, т.е. при $k_{1,2} = \lambda_{1,2}$, из выражений (6.6) получаем более простые формулы

$$a_{11} = 0, \quad a_{12} = 1, \quad a_{21} = -(\lambda_B^2 + \lambda_M^2), \quad a_{22} = 2\lambda_B. \quad (6.7)$$

Таким образом, формулы (6.3), (6.5), (6.6) дают решение «обратной задачи», позволяя найти коэффициенты a_{ij} матрицы состояния по заданным корням характеристического уравнения $\lambda_{1,2}$ и коэффициентам распределения $k_{21,22}$.

Напомним, что мы предполагаем случай неравных корней $\lambda_1 \neq \lambda_2$, т.е. рассматривается так называемый невырожденный случай. При этом, согласно (5.17) неравными получаются и коэффициенты распределения $k_{21} \neq k_{22}$; значит, в формулах (6.3), (6.5) не возникает неопределенности. В вырожденном случае равных корней $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ решение исходной системы линейных дифференциальных уравнений нельзя представить в виде суммы двух экспонент с разными показателями λ_1 и λ_2 , поэтому теряет первоначальный смысл само понятие коэффициентов распределения.

Подробное рассмотрение вырожденного случая не представляет большого практического значения, поскольку он представляет всего лишь

теоретическую границу между узлом и фокусом (устойчивыми или неустойчивыми – это зависит от знака кратного характеристического корня λ). В реальной физической системе невозможно в точности обеспечить точного совпадения корней, поэтому всегда будет реализовываться картина, близкая к узлу либо фокусу. Однако чтобы иметь полное представление о характере фазового портрета в вырожденном случае (его можно назвать «критическим узлом», либо «критическим фокусом»), нужно уметь выразить и в этом случае коэффициенты a_{ij} матрицы состояния через кратные корни характеристического уравнения $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ и кратные коэффициенты распределения $k_{21} = k_{22} = k$, а также выяснить влияние величин λ и k на характер фазового портрета в вырожденном случае.

7. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЫРОЖДЕННОГО СЛУЧАЯ

Найденные выше формулы (6.3), (6.5) перехода от произвольно заданных нами коэффициентов распределения $k_{1,2}$ и корней характеристического уравнения $\lambda_{1,2}$ к коэффициентам a_{ij} матрицы состояния линеаризованной динамической системы не годятся для вырожденного случая равных коэффициентов $k_1 = k_2 = k$ (при этом равны между собой и корни $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$). В этом случае определитель системы уравнений (6.2), (6.4) обращается в нуль и решения этих алгебраических уравнений отсутствуют. Поэтому решение «обратной задачи» в вырожденном случае требует другого подхода.

Вначале рассмотрим систему общего вида, у которой $k \neq \lambda$, а затем систему частного вида, для которой $k = \lambda$. В качестве отправных выражений будем исходить из уравнения для коэффициентов распределения (5.16)

$$a_{12}k_2^2 + (a_{11} - a_{22})k_2 - a_{21} = 0$$

и характеристического уравнения (5.10)

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0,$$

которые позволяют находить значения двух коэффициентов распределения $k_{21,22}$ и двух корней характеристического уравнения $\lambda_{1,2}$ независимо друг от друга по четырем коэффициентам a_{ij} матрицы состояния линеаризованной динамической системы. Их решения (5.17), (5.13) таковы

$$k_{21,22} = \frac{(a_{22} - a_{11}) \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}}}{2a_{12}}, \quad (5.17)$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}}}{2}. \quad (5.13)$$

Коэффициенты распределения могут быть выражены через характеристические корни и коэффициенты a_{ij} с помощью равенств (5.18)

$$k_{21,22} = \frac{\lambda_{1,2} - a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{21}}{\lambda_{1,2} - a_{22}}, \quad (5.18)$$

пользуясь которыми можно прийти обратно к уравнениям (5.10), (5.16).

Из формул (5.13), (5.17) видно, что «вырождение», т.е. равенство коэффициентов распределения

$$k_{21} = k_{22} = k = (a_{22} - a_{11}) / 2 a_{12} \quad (7.1)$$

и равенство характеристических корней

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = (a_{11} + a_{22}) / 2 \quad (7.2)$$

одновременно наступают при обращении в нуль подкоренного выражения, т.е. при условии

$$(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} = 0, \quad (7.3)$$

которое с учетом равенства (7.1) приобретает вид

$$a_{21} / a_{12} = -k^2. \quad (7.4)$$

Формула (7.4) дает нам лишь отношение коэффициентов a_{21} и a_{12} , причем они должны быть разных знаков, поскольку $k^2 > 0$.

Чтобы получить недостающие еще связи коэффициентов a_{ij} с заданными значениями λ и k , воспользуемся формулами (5.17). В вырожденном случае из них можем получить лишь два соотношения, связывающие λ и k (а не четыре, как в невырожденном)

$$a_{11} + k a_{12} = \lambda, \quad (7.5)$$

$$a_{21} + k a_{22} = k \lambda. \quad (7.6)$$

Если рассматривать динамическую систему «частного вида», для которой $\lambda = k$, то (7.6) превращается в квадратное уравнение для k (или λ):

$$k^2 - a_{22}k - a_{21} = 0. \quad (7.7)$$

Сопоставив его с общим уравнением для коэффициентов распределения (5.16), приходим к выводу о том, что динамическая система частного вида, для которой $\lambda = k$, имеет коэффициент $a_{11} = 0$, а коэффициент $a_{12} = 1$ (это можно было заметить ранее, обратив внимание на то, что запись исходных линеаризованных уравнений для случая, когда $a_{11} = 0$, $a_{12} = 1$,

означает совпадение коэффициентов распределения и корней характеристического уравнения $\lambda_{1,2} = k_{21,22}$.

Любая из формул (7.1) или (7.2) дает нам при $a_{11} = 0$, $a_{12} = 1$ значение a_{22} для системы «частного вида»:

$$a_{22} = 2\lambda = 2k, \quad (7.8)$$

а из формулы (7.4) получаем:

$$a_{21} = -\lambda^2 = -k^2. \quad (7.9)$$

Итак, задав произвольно значение $\lambda = k$, мы легко нашли все 4 коэффициента a_{ij} для системы частного вида.

Теперь отыщем значения a_{ij} в вырожденном случае $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, $k_1 = k_2 = k$ для системы «общего вида», в которой $\lambda \neq k$. Для упрощения выкладок покажем, что в вырожденном случае коэффициент a_{11} матрицы состояния обращается в нуль независимо от того, какого вида система – общего или частного. Используем с этой целью выражение коэффициента a_{11} из формулы (6.5), полученной нами выше для невырожденного случая и произведем предельный переход, заменив в ней некрратные коэффициенты распределения и характеристические корни через кратные k и λ и малые к ним приращения $\varepsilon \ll 1$, $\delta \ll 1$, т.е. примем в (6.5) $k_1 = k$; $k_2 = k + \varepsilon$; $\lambda_1 = \lambda$; $\lambda_2 = \lambda + \delta$. Легко проверить, что эта подстановка дает значение $a_{11} = \delta$. Значит, при $\delta \rightarrow 0$ получается $a_{11} = 0$, что и требовалось показать.

Подставив $a_{11} = 0$ в равенство (7.5), имеем

$$a_{12} = \lambda / k. \quad (7.10)$$

Подстановка (7.10) в (7.4) дает

$$a_{21} = -\lambda k. \quad (7.11)$$

Наконец, при $a_{11} = 0$ из выражения (7.2) получаем

$$a_{22} = 2\lambda. \quad (7.12)$$

Таким образом, мы полностью решили «обратную задачу», выразив коэффициенты a_{ij} матрицы состояния через произвольно заданные корни характеристического уравнения $\lambda_{1,2}$ и коэффициенты распределения $k_{21,22}$. Это решение охватывает все возможные соотношения между назначаемыми нами произвольно величинами $\lambda_{1,2}$ и $k_{21,22}$.

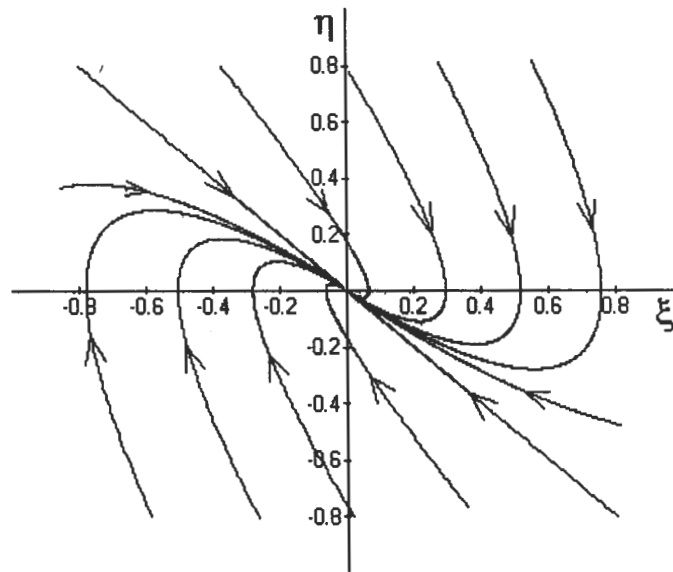


Рис. 20. Картина траекторий в окрестности устойчивого узла в вырожденном случае кратных характеристических корней $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -1$ (коэффициенты распределения также кратные и выбраны равными характеристическим корням $k_1 = k_2 = k = -1$).

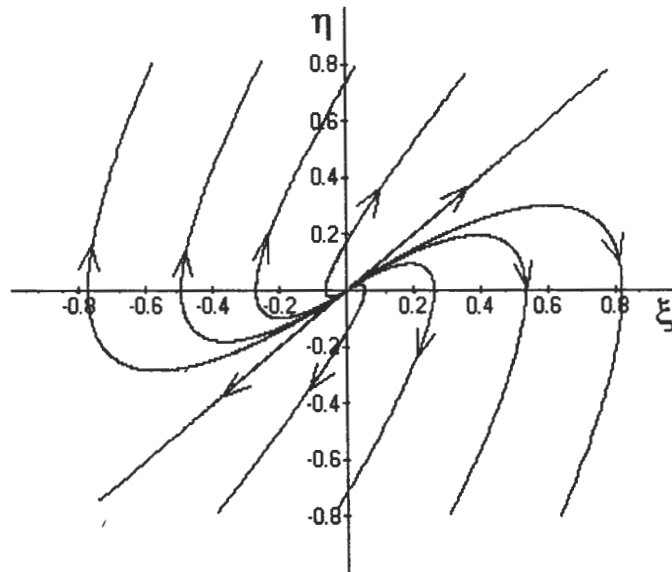


Рис. 21. Картина траекторий в окрестности неустойчивого узла в критическом случае равных характеристических корней $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = +1$ (коэффициенты распределения также кратные и выбраны равными характеристическим корням $k_1 = k_2 = k = +1$).

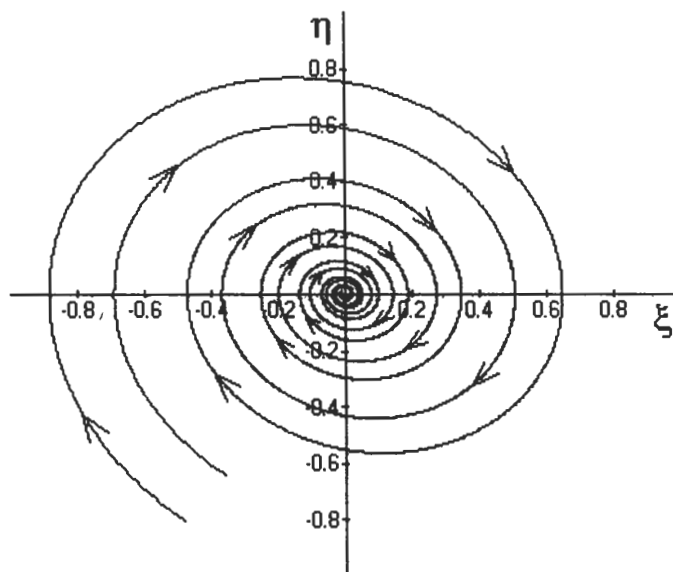


Рис. 22. Траектории устойчивого фокуса в случае динамической системы частного вида; $\lambda_B = k_B = -0,1$, $\lambda_M = k_M = 1$.

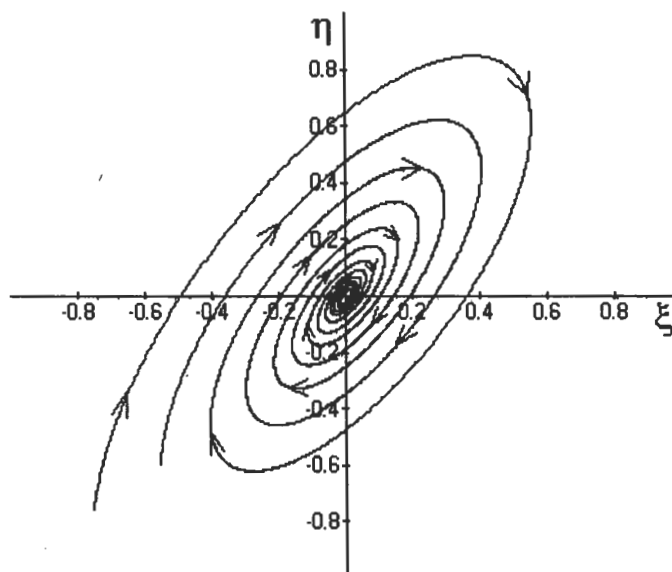


Рис. 23. Устойчивый фокус для системы общего вида – характеристические корни не равны коэффициентам распределения: $\lambda_B = -0,1$; $\lambda_M = 1$; $k_B = k_M = 1$.

Теперь проиллюстрируем вышеизложенное с помощью картин фазовых траекторий в вырожденном случае. Вначале мы даем эту картину на рис. 20 для значения $\lambda = k = -1$.

На следующем рис. 21 изображен портрет для неустойчивого узла в вырожденном случае. Видно, что смена знака корней характеристического уравнения и знака коэффициентов распределения привела к зеркальному отражению всей картины относительно вертикальной оси. Обратим внимание на траектории в виде прямых линий на рис. 20 и 21 – это совпавшие (из-за кратности коэффициентов распределения) «усы» узла; угловой коэффициент «уса» на рис. 20 равен -1 , а на рис. 21 наклон противоположный.

~~Этот~~ рисунок (рис. 23) следует сравнить с предыдущим (рис. 22), где характеристические корни такие же, а коэффициенты распределения равны характеристическим корням. Хорошо видно, что сменилось положение изоклины с горизонтальной касательной, но характер движения сохранился тем же (тип движения целиком определяется характеристическими корнями, а коэффициенты распределения лишь деформируют картину траекторий).

Таким образом, анализ фазовых траекторий в окрестностях особых точек 2-мерной системы полностью завершен (как для «прямой» задачи, так и для «обратной»). Теперь мы перейдем к исследованию гораздо более сложных картин траекторий для 3-мерного случая.

8. ФАЗОВЫЕ ТРАЕКТОРИИ В ОКРЕСТНОСТЯХ ОСОБЫХ ТОЧЕК 3–МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

Для анализа фазовых траекторий в 3–D пространстве мы располагаем готовыми общими выражениями для характеристических показателей и коэффициентов распределения, полученными ранее в разделах 3 и 4. Коэффициенты распределения k_{ij} в случае системы «общего вида» (для нее считаем ненулевыми все коэффициенты a_{ij} матрицы состояния A) выражаются через коэффициенты a_{ij} и характеристические показатели $\lambda_{1,2,3}$ с помощью довольно громоздких общих формул (3.21)–(3.26). Из них не видна непосредственная связь между k_{ij} и $\lambda_{1,2,3}$. Напомним, что для 2–D пространства, в случае системы частного вида

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} + A \frac{d\zeta}{dt} + B\zeta = 0 ,$$

коэффициенты $a_{11} = 0$, $a_{12} = 1$, и получалась очень простая связь: $k_{21} = \lambda_1$, $k_{22} = \lambda_2$. Поэтому уместно вначале установить подобную связь между k_{ij} и $\lambda_{1,2,3}$ для 3–D пространства в случае системы частного вида 3–го порядка

$$\frac{d^3\zeta}{dt^3} + A \frac{d^2\zeta}{dt^2} + B \frac{d\zeta}{dt} + C = 0 . \quad (8.1)$$

Эту систему можно записать в форме Коши

$$\begin{cases} d\xi/dt = \eta, \\ d\eta/dt = \mu, \\ d\mu/dt = -C\xi - B\eta - A\mu. \end{cases} \quad (8.2)$$

Следовательно, матрица состояния A для 3–D системы частного вида

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -C & -B & -A \end{bmatrix} . \quad (8.3)$$

Для матрицы A с такими элементами общие формулы (3.21)–(3.26) дают следующие простые соотношения

$$D_1 = D_2 = D_3; k_{21} = \lambda_1; k_{31} = \lambda_1^2; k_{22} = \lambda_2; k_{32} = \lambda_2^2; k_{23} = \lambda_3; k_{33} = \lambda_3^2. \quad (8.4)$$

Ясно, что исследование картин фазовых траекторий 3-D пространства в исходных координатах ξ, η, μ получается более простым для системы частного вида. Проще оказываются и формулы перехода от исходных координат ξ, η, μ к главным координатам U, V, W .

Если вести анализ фазовых траекторий в окрестностях особых точек линеаризованной системы 3-го порядка сразу в главных координатах, то усложнения, возникающие при переходе от 2-D к 3-D пространству, связаны с лишь с увеличением числа комбинаций расположения корней $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ характеристического уравнения такой системы на комплексной плоскости ($\lambda_{\text{в}}, j\lambda_{\text{м}}$). Для нахождения корней характеристического уравнения 3-й степени

$$\lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$$

следует воспользоваться известными из алгебры формулами или найти корни численно. Будем считать, что этап отыскания корней завершен и мы можем столкнуться с каким-либо из следующих вариантов их расположения на плоскости ($\lambda_{\text{в}}, j\lambda_{\text{м}}$):

1-й вариант: все три корня – вещественные: $\lambda_{1,2,3} \in R$. Их можно упорядочить, располагая на вещественной оси справа налево по возрастанию индексов, как это показано для случая всех трех отрицательных корней на рис. 24.

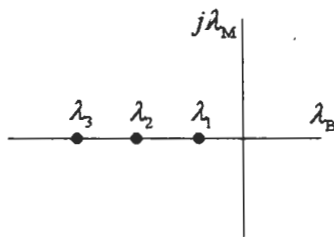


Рис. 24. Расположение трех отрицательных вещественных корней на плоскости ($\lambda_{\text{в}}, j\lambda_{\text{м}}$) по порядку индексов: $\lambda_3 < \lambda_2 < \lambda_1 < 0$.

На рис. 25 все три корня положительны, они расположены на вещественной оси плоскости ($\lambda_{\text{в}}, j\lambda_{\text{м}}$) справа от начала координат и упорядочены по возрастанию индексов в той же последовательности: $\lambda_3 < \lambda_2 < \lambda_1$.

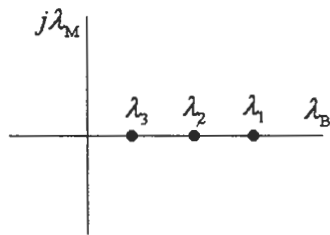


Рис. 25. Расположение трех положительных вещественных корней на плоскости $(\lambda_B, j\lambda_M)$ по порядку индексов: $0 < \lambda_3 < \lambda_2 < \lambda_1$.

Кроме того, возможны еще два случая расположения трех вещественных корней на плоскости $(\lambda_B, j\lambda_M)$; они приведены на рис.26 ($\lambda_3 < \lambda_2 < 0 < \lambda_1$) и рис. 27 ($\lambda_3 < 0 < \lambda_2 < \lambda_1$).

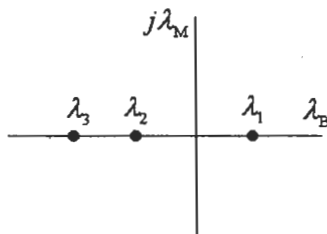


Рис. 26. Расположение трех положительных вещественных корней на плоскости $(\lambda_B, j\lambda_M)$ по порядку индексов: $\lambda_3 < \lambda_2 < 0 < \lambda_1$.

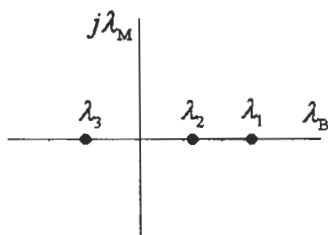


Рис. 27. Расположение трех положительных вещественных корней на плоскости $(\lambda_B, j\lambda_M)$ по порядку индексов: $\lambda_3 < 0 < \lambda_2 < \lambda_1$.

Эти 4 случая расположения трех вещественных корней порождают 4 типа особых точек, каждому из них в теории колебаний присвоено свое наименование:

- 1) $\lambda_3 < \lambda_2 < \lambda_1 < 0$; 3-D устойчивый узел (устойчивая точка параболического вида). (рис. 24)
- 2) $0 < \lambda_3 < \lambda_2 < \lambda_1$; 3-D неустойчивый узел (неустойчивая точка параболического вида). (рис. 25)
- 3) $\lambda_3 < \lambda_2 < 0 < \lambda_1$; Седло - узел 1-го рода (неустойчивая точка гиперболического вида). (рис. 26)
- 4) $\lambda_3 < 0 < \lambda_2 < \lambda_1$; Седло - узел 2-го рода (неустойчивая точка гиперболического вида). (рис. 27)

(Данная терминология, вообще говоря, не является общепринятой в широко известной литературе по основам Теории колебаний [2,5], см. Примечание 2)

Картины фазовых траекторий в главных координатах $U = C_1 \exp(\lambda_1 t)$, $V = C_2 \exp(\lambda_2 t)$ и $W = C_3 \exp(\lambda_3 t)$, каждая из которых «движется» экспоненциально лишь с одним из характеристических показателей λ_1 , λ_2 или λ_3 , можно построить с помощью полученных ранее соотношений (4.5)

$$U^{\lambda_2} = C_{12} V^{\lambda_1}, \quad V^{\lambda_3} = C_{23} W^{\lambda_2}, \quad W^{\lambda_1} = C_{31} U^{\lambda_3},$$

или в другой записи (4.6)

$$U = C_{21} V^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}, \quad V = C_{32} W^{\frac{\lambda_2}{\lambda_3}}, \quad W = C_{13} U^{\frac{\lambda_3}{\lambda_1}}.$$

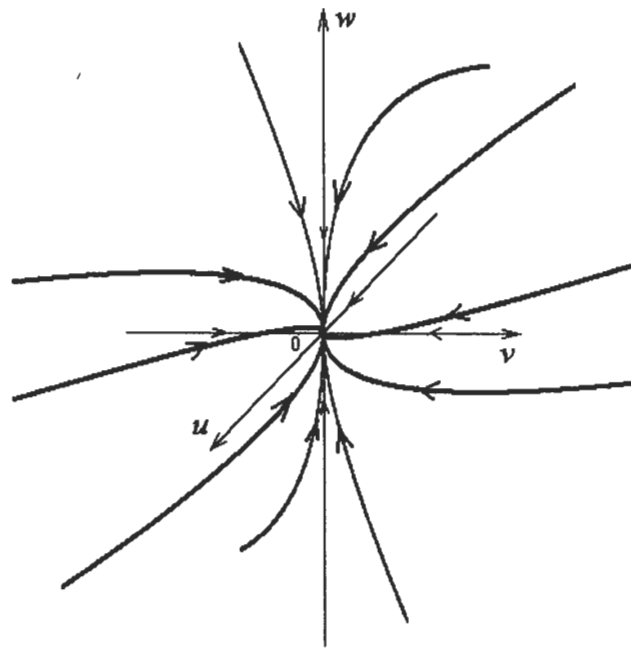
Результаты построений по этим формулам для случая узловых особых точек приведены на рис.28,а и рис.28,б.

Как видно из картин рис. 28, в случае устойчивого узла все траектории, начинающиеся в различных точках 3-D фазового пространства U , V и W , монотонно сходятся к началу координат (случай апериодического движения во временной области). Через саму узловую точку проходят все фазовые траектории, в том числе, совпадающие с осями главных координат U , V , W . Для неустойчивого узла ситуация отличается лишь направлением движения – все траектории уходят из любой бесконечно малой окрестности начала координат. В обоих случаях характеристические показатели λ_1 , λ_2 , λ_3 выбраны не сильно различающимися, поэтому схождение (или расхождение) траекторий по всем трем осям координат различается не сильно.

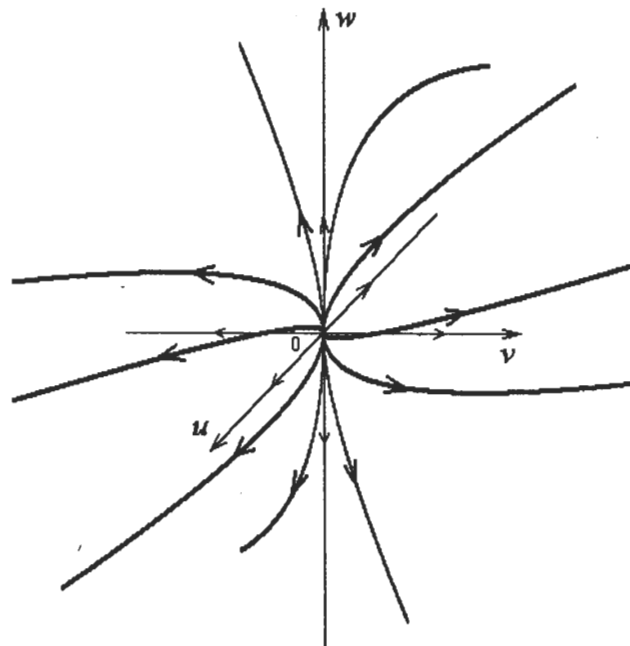
На рис. 29 приведены построения фазовых траекторий для случаев гиперболических особых точек, т.е. седло – узлов 1-го и 2-го рода.

В отличие от узловых (параболических) особых точек через сами особые точки гиперболического типа (седло-узлы 1-го и 2-го рода) проходят не все фазовые траектории, а определенное их число – две в случае 2-D пространства, три для 3-D пространства и т.д. Проходящие через гиперболическую особую точку траектории называют особыми, для 3-D пространства получаются либо две входящих (для отрицательных характеристических показателей) и одна выходящая (для положительного показателя), либо наоборот; поэтому и различают седло-узлы 1-го и 2-го рода. Иногда эти особые траектории называют сепаратриссами седло-узла (по аналогии с 2-D случаем).

Структура траекторий седло – узлов 1-го и 2-го рода похожая; они различаются направлением движения изображающих точек, что отчетливо видно на рис. 29 из направлений особых траекторий (сепаратрисс) – в одном случае имеем пару выходящих ($\lambda_{2,3} = 1$), а в другом пару входящих ($\lambda_{2,3} = -1$) сепаратрисс.

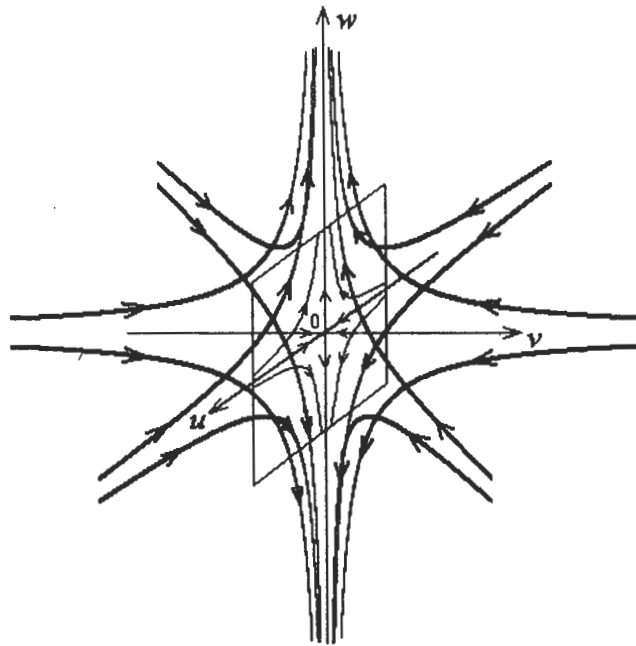


а) 3-D Устойчивый узел, $\lambda_1 = -1, \lambda_{2,3} = -2$.

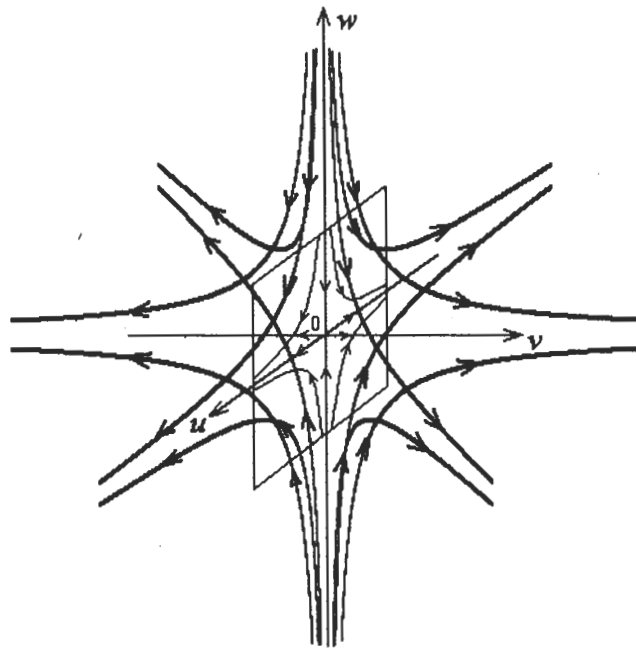


б) 3-D Неустойчивый узел, $\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = 2$.

Рис. 28 Фазовые траектории в окрестностях 3-D особых точек узлового типа.



а) Седло-узел 1-го рода (с парой входящих сепаратрисс); $\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = -1$



б) Седло-узел 2-го рода (с парой выходящих сепаратрисс); $\lambda_1 = -1, \lambda_{2,3} = 1$

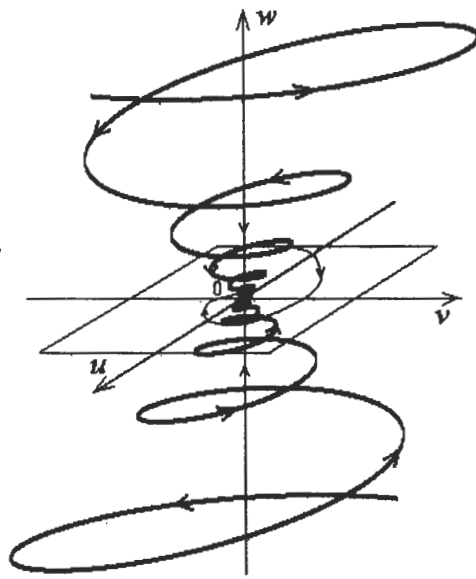
Рис. 29. Особые точки гиперболического типа (седло-узлы 1-го и 2-го рода).

2-й вариант: из трех возможных корней один вещественный и два комплексно-сопряженные. При этом также можно выделить 4 типа особых точек в зависимости от расположения трех корней на плоскости ($\lambda_v, j\lambda_m$):

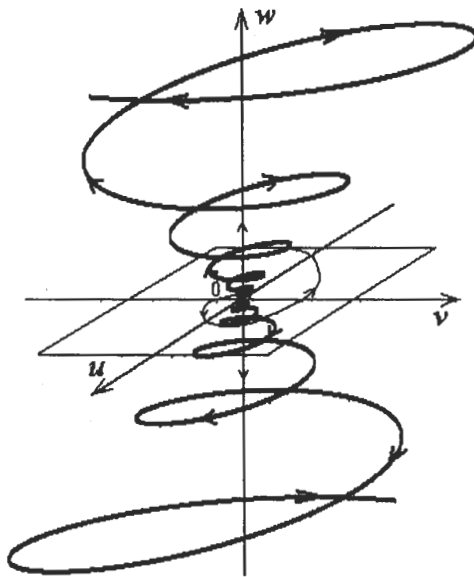
- 5) Все корни расположены в левой полуплоскости ($\lambda_v, j\lambda_m$): $\lambda_1 < 0$, $\lambda_{2,3} = \lambda_v \pm j\lambda_m$, $\lambda_v < 0$ (величина λ_m считается положительной, а соотношение между численными значениями λ_1 и λ_v не имеет существенного значения с качественной точки зрения). Такую особую точку называют устойчивым узло-фокусом.
- 6) Все корни расположены в правой полуплоскости ($\lambda_v, j\lambda_m$): $\lambda_1 > 0$, $\lambda_{2,3} = \lambda_v \pm j\lambda_m$, $\lambda_v > 0$. Этот случай противоположен предыдущему, особая точка является неустойчивым узло-фокусом.
- 7) Вещественный и пара комплексно-сопряженных корней располагаются по разные стороны оси ординат плоскости ($\lambda_v, j\lambda_m$), причем $\lambda_1 < 0$, $\lambda_{2,3} = \lambda_v \pm j\lambda_m$, $\lambda_v > 0$. Получаем неустойчивую точку, которую из-за указанного расположения корней относят к гиперболическому типу (неустойчивый седло – фокус 1-го рода).
- 8) Вещественный и пара комплексно-сопряженных корней снова располагаются по разные стороны оси ординат плоскости ($\lambda_v, j\lambda_m$), но меняются местами, так что $\lambda_1 > 0$, $\lambda_{2,3} = \lambda_v \pm j\lambda_m$, $\lambda_v < 0$. Снова получаем неустойчивую точку гиперболического типа, ее иногда называют неустойчивым седло-фокусом 2-го рода.

Картины траекторий в окрестностях устойчивого и неустойчивого узло-фокуса приведены на рис. 30,а и рис. 30,б. Они соответствуют случаю двух комплексно-сопряженных и одного действительного характеристических показателей: $\lambda_1 \in R$, $\lambda_{2,3} = \lambda_v \pm j\lambda_m$, $\lambda_v, \lambda_m \in R$.

Структура «носителей» фазовых траекторий рис. 30,а и рис. 30,б одинаковая, их различие состоит в направлении движения изображающей точки. В случае устойчивого узло-фокуса движение представляет скручивающуюся к началу координат 3-мерную спираль (затухающие осцилляции во временной области). Быстрота затухания определяется значением вещественной части комплексно-сопряженных корней; величина действительного корня задает степень сжатия витков «спиральной пружины» в направлении той главной координаты, вокруг которой центрирована спираль (на обоих графиках рис. 30 это ось W). Для неустойчивого узла затухание меняет знак и изображающая точка уходит от начала координат по раскручивающейся спирали.



а) Устойчивый узло-фокус, $\lambda_1 = -1, \lambda_{2,3} = -1 \pm j8$



б) Неустойчивый узло-фокус, $\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = 1 \pm j8$

Рис. 30. Фазовые траектории в окрестностях особых точек типа узло-фокус.

Движения траекторий в окрестностях седло-фокусов 1-го и 2-го рода приведены на рис. 31,а и рис. 31,б. Структура особых точек на них также одинаковая – фазовый портрет рис. 31,б формально получается из рис. 31,а изменением направления движения траекторий.

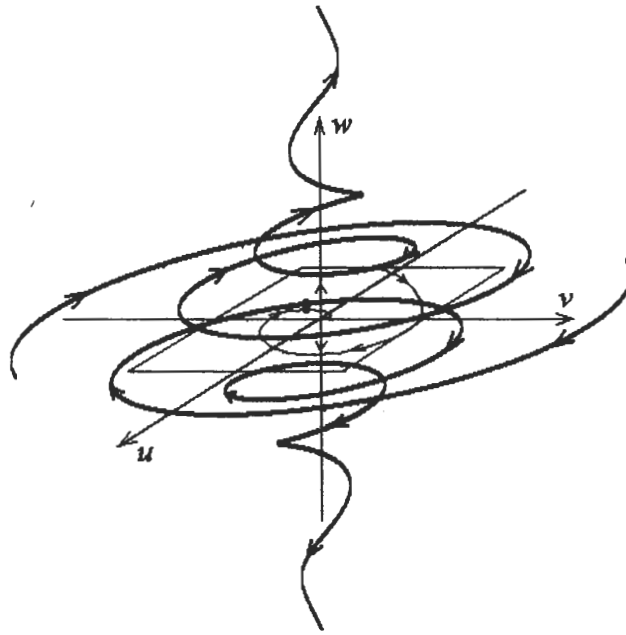
Если взглянуть на седло-фокусы вдоль координаты W , т.е. спроецировать 3-D фазовый портрет на плоскость (U, V) , то в случае седло-фокуса 1-го рода мы увидим 2-D устойчивый фокус, а в случае седло-фокуса 2-го рода – неустойчивый фокус. Однако обе эти точки являются неустойчивыми в 3-мерном пространстве, так как в первом случае траектория асимптотически приближается к оси OW и «убегает» на бесконечность вдоль нее, а во втором – асимптотически приближается к плоскости (U, V) и «раскручивается» вдоль нее, также уходя в бесконечность.

Быстрота затухания/расхождения «спиралей» определяется значениями вещественной части комплексно-сопряженных корней; величина действительного корня задает степень сжатия витков в направлении координаты W и скорость движения вдоль нее.

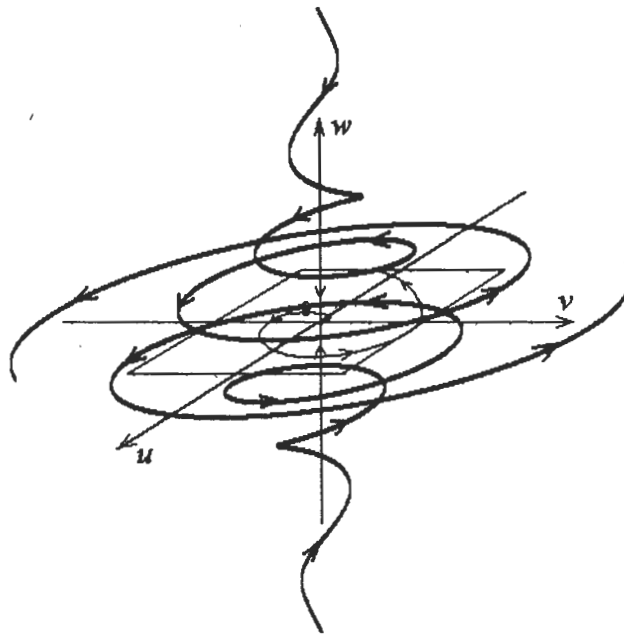
3-й вариант: он охватывает 2 случая, когда происходит переход через нуль вещественного корня или вещественной части комплексно – сопряженных частей. Такая ситуация соответствует границе между устойчивыми и неустойчивыми состояниями равновесия; ее можно отождествить с «негрубой» системой – при малейшем изменении параметров реальной динамической системы происходит переход к одной из рассмотренных выше «грубых» картин траекторий, не меняющихся качественно при малых вариациях параметров.

- 9) Вещественная часть комплексно – сопряженных корней обращается в нуль ($\lambda_{\text{в}}=0$), т.е. имеем два чисто мнимых корня $\lambda_{2,3} = \pm j\lambda_{\text{м}}$ и один действительный λ_1 . В зависимости от знака действительного корня получаем устойчивый ($\lambda_1 < 0$) и неустойчивый ($\lambda_1 > 0$) центр-фокусы. На рис. 32,а изображен пример устойчивого центр-фокуса.
- 10) Действительный корень $\lambda_1 = 0$. В этом случае в зависимости от знака вещественной части комплексно-сопряженных корней получаем устойчивый ($\lambda_{\text{в}} < 0$, рис. 32,б) и неустойчивый ($\lambda_{\text{в}} > 0$) фокус-центры.

По аналогии с центр-фокусами и фокус-центрами, существуют также особые точки типов с чисто действительными характеристическими корнями: устойчивый ($\lambda_1=0, \lambda_{2,3}<0$) и неустойчивый ($\lambda_1=0, \lambda_{2,3}>0$) узел-центр, а также седло-центр ($\lambda_1=0, \lambda_2<0, \lambda_3>0$).

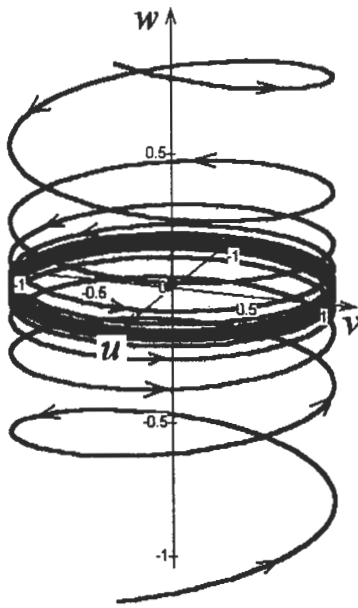


а) Седло-фокус 1-го рода (с выходящими сепаратриссами); $\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = -1 \pm j8$

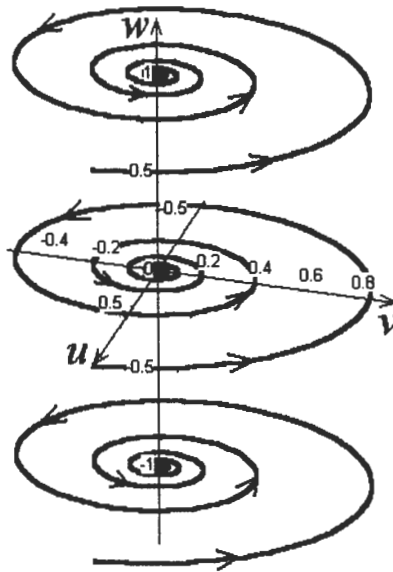


б) Седло-фокус 2-го рода (с входящими сепаратриссами); $\lambda_1 = -1, \lambda_{2,3} = 1 \pm j8$

Рис. 31. Особые точки седло-фокусного типа.



а) Устойчивый центр-фокус; $\lambda_1 = -1, \lambda_{2,3} = \pm j4$



б) Устойчивый фокус-центр; $\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = -1 \pm j4$

Рис. 32. Особые точки «негрубой системы».

ПРИМЕЧАНИЯ

ПРИМЕЧАНИЕ 1

Продemonстрируем получение выражения (4.5) более формальным способом преобразования координат. Заменой переменных всегда можно свести систему (5.6) от исходных координат ξ, η к некоторым другим координатам U, V (не обязательно главным) в виде

$$dU/dt = P U, \quad dV/dt = Q V, \quad (\text{п.1})$$

где P, Q – некоторые наперед заданные коэффициенты. Выделив элемент dt , получим сопровождающее дифференциальное уравнение для новых координат

$$dU/PU = dV/QV. \quad (\text{п.2})$$

Ясно, что главными (согласно их определению) эти координаты будут лишь при условии $P = \lambda_1, Q = \lambda_2$. Сопровождающее уравнение (п.2) интегрируется непосредственно

$$Q \ln |U| = P \ln |V| + \ln C, \quad (\text{п.3})$$

где C – константа интегрирования. Потенцируя слагаемые в (п.3), приходим к выражению

$$U^Q = C V^P, \quad (\text{п.4})$$

которое при условии $P = \lambda_1, Q = \lambda_2$ переходит в выражение (4.5) для фазовых траекторий в главных координатах.

Казалось бы, задача отыскания формулы, позволяющей строить фазовые траектории в главных координатах, решена (причем очень просто). Однако, пользы от нее пока мало, поскольку мы просто исключили время в заранее выбранной системе дифференциальных уравнений (п.1), а это не дает никакой связи формально введенных по уравнениям (п.1) новых координат U, V с исходными, фигурирующими в физической задаче, координатами ξ, η . Это объясняется тем, что в приведенных выкладках никак не задействованы

коэффициенты распределения (они и не нужны для описания траекторий в главных координатах). Покажем, что эти коэффициенты обязательно потребуются при конструировании выражений, связывающих новые U, V координаты с исходными координатами ξ, η .

Будем искать формулы перехода от исходных координат к новым координатам в виде линейного (аффинного) преобразования

$$U = \alpha\xi + \beta\eta, \quad V = \gamma\xi + \delta\eta. \quad (\text{п.5})$$

Неизвестные постоянные коэффициенты α, β, γ и δ находятся следующим образом. Продифференцируем по времени систему уравнений (п.5)

$$dU/dt = \alpha (d\xi/dt) + \beta (d\eta/dt), \quad dV/dt = \gamma (d\xi/dt) + \delta (d\eta/dt) \quad (\text{п.6})$$

и используем взамен dU/dt и dV/dt их выражения из (п.1), причем примем на конечном этапе условие $P = \lambda_1, Q = \lambda_2$. Выражения производных $(d\xi/dt)$ и $(d\eta/dt)$ заимствуем из правых частей дифференциальных уравнений (5.6) линейной модели. Тогда система (п.6) переходит в два равенства

$$P(\alpha\xi + \beta\eta) = \alpha(a_{11}\xi + a_{12}\eta) + \beta(a_{21}\xi + a_{22}\eta), \quad (\text{п.7})$$

$$Q(\gamma\xi + \delta\eta) = \gamma(a_{11}\xi + a_{12}\eta) + \delta(a_{21}\xi + a_{22}\eta). \quad (\text{п.8})$$

Оба равенства должны выполняться для всех значений исходных координат ξ, η . Поэтому коэффициенты при этих переменных в левых и правых частях равенств должны совпадать. Приравнивание соответствующих коэффициентов дает

$$(a_{11} - P)\alpha + a_{21}\beta = 0, \quad a_{12}\alpha + (a_{22} - P)\beta = 0, \quad (\text{п.9})$$

$$(a_{11} - Q)\gamma + a_{21}\delta = 0, \quad a_{12}\gamma + (a_{22} - Q)\delta = 0. \quad (\text{п.10})$$

Мы получили две системы, каждая из 2-х линейных однородных уравнений, для нахождения 4-х неизвестных коэффициентов $\alpha, \beta, \delta, \gamma$. Чтобы иметь нетривиальное решение, определители каждой из систем (п.9) и (п.10) должны равняться нулю

$$(a_{11} - P)(a_{22} - P) - a_{12}a_{21} = 0, \quad (a_{11} - Q)(a_{22} - Q) - a_{12}a_{21} = 0. \quad (\text{п.11})$$

Поскольку коэффициенты a_{ij} заданы, то каждая из назначенных нами ранее величин P и Q не может быть ничем иным, как характеристическим показателем, т.е. обязательно $P = \lambda_1, Q = \lambda_2$. Это непосредственно вытекает из сопоставления соотношений (п.11) с характеристическим уравнением (5.10), которое служит для нахождения величин λ_1 и λ_2 . Таким образом,

получается, что существует лишь единственная пара главных координат U, V , экспоненциально изменяющихся во времени с одним лишь показателем P или Q , причем эти показатели – характеристические корни λ_1 и λ_2 .

С учетом этого уравнения (п.9) и (п.10) дают нам не сами 4 коэффициента $\alpha, \beta, \delta, \gamma$, которые требуются для выражения главных координат через исходные, согласно формуле (п.5), а всего лишь их попарные отношения

$$\beta/\alpha = a_{21} / (\lambda_1 - a_{11}) = (\lambda_1 - a_{22}) / a_{12}, \quad \delta/\gamma = a_{21} / (\lambda_2 - a_{11}) = (\lambda_2 - a_{22}) / a_{12}. \quad (\text{п.12})$$

Если рассматриваем невырожденный случай неравных характеристических корней $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то эти отношения не равны между собой, т.е. $\beta / \alpha \neq \delta / \gamma$. При этом определитель системы (п.5) не может быть равен нулю: $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Значит, обеспечивается возможность разрешения уравнений (п.5) относительно ξ, η и гарантируется взаимная однозначность преобразования (п.5). Таким образом, вышеприведенные выкладки доказывают, что в невырожденном случае всегда можно преобразовать описание системы в исходных координатах ξ, η в описание ее же в главных координатах U, V .

Сравнивая эти отношения с формулами (5.17), видим, что они связаны с коэффициентами распределения k_{21} и k_{22} .

До сих пор мы полагали корни характеристического уравнения разными, т.е. считали $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Если же они оказались кратными $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, то общее решение исходной системы нельзя принимать в виде суммы двух экспонент с разными показателями λ_1 и λ_2 , как это показано в (5.19,а), (5.19,б). В этом частном случае удобно перейти от исходных координат ξ, η к новым координатам U, V по следующим формулам

$$U = a_{11}\xi + 0,5 (a_{12} - a_{21}) \eta, \quad V = \eta. \quad (\text{п.13})$$

Тогда уравнения движения в новой системе координат примут вид:

$$dU/dt = \lambda U, \quad dV/dt = U + \lambda V. \quad (\text{п.14})$$

Можно сказать, что здесь U – главная координата «в чистом виде», а V не является таковой. Отсюда получаем сопровождающее уравнение

$$dV/dU = (U + \lambda V) / \lambda U, \quad (\text{п.15})$$

а его решение, т.е. выражение для фазовых траекторий в новых координатах U, V имеет следующий вид

$$V = (1/\lambda) U \ln |U| + CU, \quad (\text{п.16})$$

где C – произвольная постоянная.

ПРИМЕЧАНИЕ 2

Используемые в данном пособии названия особых точек 3-мерного фазового пространства не соответствует в точности названиям, используемой в иной литературе по основам Теории колебаний, например [2,5]. В частности, точки равновесия 3-го и 4-го типов (рис. 29), называемые здесь седло-узлами – в [5] именуется седлами, а состояния 5-го и 6-го типов (рис. 30), т.е. узло-фокусы – фокусами. При этом, считается, что общее число типов особых точек фазового пространства размерности N (не считая негрубых ситуаций, как, например, центр) равно $(N+1)$. Так на плоскости ($N=2$) мы имеем три типа особых точек: узлы, фокусы и седла. В 3-мерном пространстве ($N=3$) к ним добавляется еще один тип – седло-фокус.

Однако в данном пособии применяется несколько иная терминология, по сравнению с общепринятой. Причина этого подхода заключается в стремлении придать дополнительную «окраску» к особенностям поведения фазовых траекторий в 3-мерном пространстве, которая помогает яснее представить себе их структуру с инженерной точки зрения.

Учебное издание

КАПРАНОВ Михаил Владимирович,
ТОМАШЕВСКИЙ Алексей Иосифович.

**АНАЛИЗ ФАЗОВЫХ ТРАЕКТОРИЙ В ОКРЕСТНОСТЯХ ОСОБЫХ ТОЧЕК
2-D И 3-D НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

**Учебное пособие по курсу «Теория колебаний»
для студентов, обучающихся по направлениям 552500 и 654200**

«Радиотехника»

Редактор М. В. Капранов

Редактор издательства О. М. Горина

ЛР № 020528 от 05.06.97

Темплан издания МЭИ 2003 (II), учебн.

Формат 60x84/16

Печать офсетная

Подписано в печать

Бумага офсетная

Печ. л.

Тираж

Изд. № 40

Заказ

Цена руб.

Издательство МЭИ, 111250, Москва, Красноказарменная ул., д. 14

Отпечатано в типографии ЦНИИ «Электроника», 117415, Москва, просп. Вернадского, д. 39