Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана

Г. А. Гладилина

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТОЭ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ СЕМИНАРОВ И РУБЕЖНОГО КОНТРОЛЯ

Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана
1995

ББК 31.21
Г52

Рецензенты: О.И. Мисеюк, В.И.Пищиков

Г52 Гладилина Г.А. Сборник задач по ТОЭ для проведения семинаров и рубежного контроля / Под ред. С.С.Николаева. - М.: Изд-во МГТУ, 1995. - 74 с., ил.

Изложены методы решения задач по второй части курса теоретических основ электротехники (четырехполюсники, фильтры, цепи с распределенными параметрами, нелинейные цепи), а также по электрическим машинам малой мощности.
По указанным разделам приведено решение многих типовых задач.
Для подготовки студентов 2-го и 3-го курсов к практическим занятиям и рубежному контролю.

Ил. 50. Табл. 1.

ББК 31.21

1. ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ

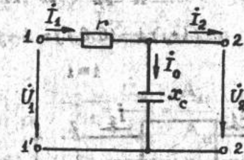


Рис. 1

Задача 1.1. Определить коэффициенты формы $|A|$ четырехполюсника с помощью уравнений Кирхгофа (рис. 1, $r = 10$ Ом, $x_c = 10$ Ом).

Р е ш е н и е. Уравнения четырехполюсника в форме $|A|$ имеют вид

$$\left.\begin{aligned}\dot U_1 &= A_{11}\dot U_2 + A_{12}\dot I_2\\ \dot I_1 &= A_{21}\dot U_2 + A_{22}\dot I_2\end{aligned}\right\}. \tag{1.1}$$

Составим уравнение по 1-му закону Кирхгофа для узла a, предварительно обозначив ток $\dot I_0$ (см. рис. 1)

$$\dot I_1 = \dot I_2 + \dot I_0 = \dot I_2 + \frac{\dot U_2}{-jx_c} = \dot I_2 + \frac{\dot U_2}{-j10} = \dot I_2 + 0{,}1j\dot U_2 \tag{1.2}$$

Составим уравнение по 2-му закону Кирхгофа для контура 1, 2, 2', 1'

$$\dot U_1 = \dot I_1 r + \dot U_2 = (\dot I_2 + 0{,}1j\dot U_2)r + \dot U_2 =$$

$$= \dot I_2 r + 0{,}1rj\dot U_2 + \dot U_2 = 10\dot I_2 + (1+j)\dot U_2. \tag{1.3}$$

Сравнивая уравнения (1.2) и (1.3) с системой уравнений (1.1), получаем

$$\left.\begin{aligned}\dot U_1 &= (1+j)\dot U_2 + 10\dot I_2\\ \dot I_1 &= 0{,}1j\dot U_2 + \dot I_2\end{aligned}\right\}, \text{ откуда}$$

$$A_{11} = 1+j;\quad A_{12} = 10 \text{ Ом};\quad A_{21} = 0{,}1j \text{ См};\quad A_{22} = 1.$$

Проверка выполнения условия пассивности:

$$A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1; \qquad (I.4)$$

$$(1+j)\cdot 1 - 10\cdot 0{,}1j = 1 + j - j = 1;$$

$$1 = 1$$

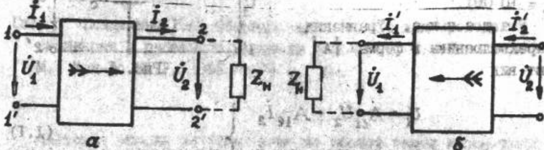


Рис. 2

Задача I.2. Определить коэффициенты четырехполюсника формы $|A|$, если известны следующие данные опытов холостого хода (ХХ) и короткого замыкания (КЗ):

1) опыт ХХ при питании с прямой стороны (рис. 2а)

$$U_{1X} = 100\sqrt{2}\ \text{В};\ I_{1X} = 10\ \text{А};\ P_{1X} = 1000\ \text{Вт};\ \varphi_{1X} > 0;$$

2) опыт ХХ при питании с обратной стороны (рис. 2б)

$$U_{2X} = 100\sqrt{2}\ \text{В};\ I_{2X} = 10\ \text{А};\ P_{2X} = 1000\ \text{Вт};\ \varphi_{2X} < 0;$$

3) опыт КЗ при питании с обратной стороны (рис. 2б)

$$U_{2K} = 100\sqrt{2}\ \text{В};\ I_{2K} = 20\ \text{А};\ P_{2K} = 2000\ \text{Вт};\ \varphi_{2K} < 0.$$

Р е ш е н и е. Уравнения формы $|A|$ при питании четырехполюсника с обратной стороны имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \dot U_2 &= A_{22}\dot U_1 + A_{12}\dot I_1' \\ \dot I_2' &= A_{21}\dot U_1 + A_{11}\dot I_1' \end{aligned}\right\}; \qquad (I.5)$$

1) в случае режима ХХ при питании с прямой стороны ($Z_н = \infty$, $\dot I_2 = 0$) имеем

$$\dot U_{1X} = A_{11}\dot U_{2X};\ \dot I_{1X} = A_{21}\dot U_{2X};\ Z_{1X} = \frac{\dot U_{1X}}{\dot I_{1X}} = \frac{A_{11}}{A_{21}}; \qquad (I.6)$$

2) в случае режима ХХ при питании с обратной стороны ($Z_н = \infty$, $\dot I_1' = 0$) имеем

$$\dot U_{2X} = A_{22}\dot U_{1X};\ \dot I_{2X}' = A_{21}\dot U_{1X};\ Z_{2X} = \frac{\dot U_{2X}}{\dot I_{2X}'} = \frac{A_{22}}{A_{21}}; \qquad (I.7)$$

3) в случае режима КЗ при питании с обратной стороны ($Z_н = 0$, $\dot U_1 = 0$) получим

$$\dot U_{2K} = A_{12}\dot I_{1K}';\ \dot I_{2K}' = A_{11}\dot I_{1K}';\ Z_{2K} = \frac{\dot U_{2K}}{\dot I_{2K}'} = \frac{A_{12}}{A_{11}}. \qquad (I.8)$$

Совместное решение уравнений (I.6)...(I.8) с учетом условия пассивности (I.4) дает

$$A_{11} = \sqrt{\frac{Z_{1X}}{Z_{2X} - Z_{2K}}};\ A_{21} = \frac{A_{11}}{Z_{1X}};\ A_{22} = A_{21}Z_{2X};\ A_{12} = A_{11}Z_{2K}.$$

Определим численные значения комплексных сопротивлений Z_{1X}; Z_{2X}; Z_{2K} и коэффициентов формы $|A|$:

1) $z_{1X} = \dfrac{U_{1X}}{I_{1X}} = \dfrac{100\sqrt{2}}{10} = 10\sqrt{2}$; $\cos\varphi_{1X} = \dfrac{P_{1X}}{U_{1X}I_{1X}} = \dfrac{1000}{100\sqrt{2}\cdot 10} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$,

$$\varphi_{1X} = +\frac{\pi}{4};\ Z_{1X} = 10\sqrt{2}\,e^{j\frac{\pi}{4}} = 10 + j10;$$

2) $z_{2X} = \dfrac{U_{2X}}{I_{2X}'} = \dfrac{100\sqrt{2}}{10} = 10\sqrt{2}$; $\cos\varphi_{2X} = \dfrac{P_{2X}}{U_{2X}I_{2X}'} =$

$$= \frac{1000}{100\sqrt{2}\cdot 10} = \frac{1}{\sqrt{2}};\ \varphi_{2X} = -\frac{\pi}{4};\ Z_{2X} = 10\sqrt{2}\,e^{-j\frac{\pi}{4}} = 10 - j10;$$

3) $z_{2K} = \dfrac{U_{2K}}{I_{2K}'} = \dfrac{100\sqrt{2}}{20} = 5\sqrt{2}$; $\cos\varphi_{2K} = \dfrac{P_{2K}}{U_{2K}I_{2K}'} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$,

$$\varphi_{2K} = -\frac{\pi}{4};\ Z_{2K} = 5\sqrt{2}\,e^{-j\frac{\pi}{4}} = 5 - j5;$$

4) $A_{11}=\sqrt{\dfrac{Z_{1X}}{Z_{2X}-Z_{2K}}}$; $A_{11}=\sqrt{\dfrac{10\sqrt{2}\,e^{j\frac{\pi}{4}}}{10-j10-5+5j}}=$

$$=\sqrt{\frac{10\sqrt{2}\,e^{j\frac{\pi}{4}}}{5\sqrt{2}\,e^{-j\frac{\pi}{4}}}}=\sqrt{2}\,e^{j\frac{\pi}{4}}=1+j.$$

$$A_{21}=\frac{A_{11}}{Z_{1X}}\ ;\quad A_{21}=\frac{\sqrt{2}\,e^{j\frac{\pi}{4}}}{10\sqrt{2}\,e^{j\frac{\pi}{4}}}=0{,}1\ \text{См}.$$

$$A_{22}=A_{21}Z_{2X}\ ;\ A_{22}=0{,}1\cdot 10\sqrt{2}\,e^{-j\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}\,e^{-j\frac{\pi}{4}};$$

$$A_{12}=A_{11}Z_{2K}\ ;\ A_{12}=\sqrt{2}\,e^{j\frac{\pi}{4}}\cdot 5\sqrt{2}\,e^{-j\frac{\pi}{4}}=10\ \text{Ом}.$$

Задача I.3. Определить коэффициенты формы |A| четырехполюсника и параметры его Т-образной схемы замещения (рис. 3, $r=x_{L1}=x_{L2}=x_C=10$ Ом).

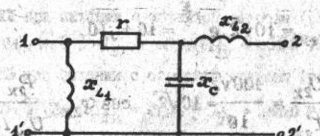


Рис. 3

Р е ш е н и е. Определим данные опытов холостого хода и короткого замыкания:

I) опыт ХХ при питании с прямой стороны (зажимы 2-2' разомкнуты):

$$Z_{1X}=\frac{jx_{L1}(r-jx_C)}{jx_{L1}+r-jx_C}=\frac{10j(10-10j)}{10}=10+j10;$$

2) опыт ХХ при питании с обратной стороны (зажимы I-I' разомкнуты):

$$Z_{2X}=jx_{L2}+\frac{(r+jx_{L1})(-jx_C)}{r+jx_{L1}-jx_C}=10j+\frac{(10+j10)(-j10)}{10}=10;$$

3) опыт КЗ при питании с обратной стороны (зажимы I-I' замкнуты накоротко):

$$Z_{2K}=jx_{L2}+\frac{r(-jx_C)}{r-jx_C}=j10+\frac{10(-j10)}{10-j10}=5+j5.$$

Находим коэффициенты четырехполюсника формы |A|:

$$A_{11}=\sqrt{\frac{Z_{1X}}{Z_{2X}-Z_{2K}}}\ ;\ A_{11}=\sqrt{\frac{10+j10}{10-5-j5}}=\sqrt{\frac{2+j2}{1-j}}=\sqrt{2}\,e^{j\frac{\pi}{4}};$$

$$A_{21}=\frac{A_{11}}{Z_{1X}}=\frac{\sqrt{2}\,e^{j\frac{\pi}{4}}}{10\sqrt{2}\,e^{j\frac{\pi}{4}}}=0{,}1;\ A_{22}=A_{21}Z_{2X};\ 0{,}1\cdot 10=1;$$

$$A_{12}=A_{11}\cdot Z_{2K}=\sqrt{2}\,e^{j\frac{\pi}{4}}\cdot 5\sqrt{2}\,e^{j\frac{\pi}{4}}=10e^{j\frac{\pi}{2}}=10j.$$

Проверка выполнения условия пассивности (I.4):

$$\sqrt{2}\,e^{j\frac{\pi}{4}}\cdot 1-10j\cdot 0{,}1=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-j=1+j-j=1;$$

$$1=1.$$

Определим параметры Т-образной схемы замещения четырехполюсника (рис. 4а):

$$Z_1=\frac{A_{11}-1}{A_{21}}=\frac{1+j-1}{0{,}1}=10j;$$

$$Z_0=\frac{1}{A_{21}}=\frac{1}{0{,}1}=10;$$

$$Z_2=\frac{A_{22}-1}{A_{21}}=\frac{1-1}{0{,}1}=0.$$

Схема замещения четырехполюсника представлена на рис. 4б.

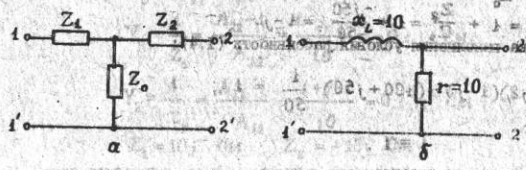


Рис. 4

Следует подчеркнуть, что параметры Z_{1x}; Z_{2x} и Z_{2k} могут быть получены экспериментально.

Задача I.4. Определить: I) коэффициенты формы $|A|$ четырехполюсника; 2) напряжение $\dot U_1$ и ток $\dot I_1$, если четырехполюсник работает на нагрузку Z_2, причем P_2 = 100 Вт, U_2 = 100 В, I_2 = 1 А (рис. 5, x_L = 100 Ом, x_C = 50 Ом, r = 50 Ом).

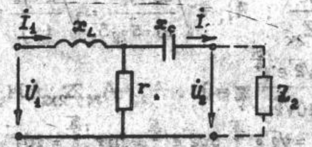


Рис. 5

Р е ш е н и е.

I. Определим коэффициенты формы $|A|$ через параметры Т-образной схемы замещения (см. рис. 4а):

$$Z_1 = jx_L = j\cdot 100\ ;\quad Z_2 = -jx_C = -j50\ ;\quad Z_0 = r = 50;$$

$$A_{11} = 1 + \frac{Z_1}{Z_0} = 1 + \frac{j100}{50} = 1 + j2;$$

$$A_{12} = Z_1 + Z_2 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_0} = j100 - j50 + \frac{j100(-j50)}{50} = 100 + j50;$$

$$A_{21} = \frac{1}{Z_0} = \frac{1}{50};$$

$$A_{22} = 1 + \frac{Z_2}{Z_0} = 1 + \frac{-j50}{50} = 1 - j.$$

Проверка выполнения условия пассивности (I.4):

$$(1+j2)(1-j) - (100+j50)\cdot\frac{1}{50} = 1\ ;$$

$$1 = 1.$$

2. Положим $\dot I_2 = I_2 = 1$ А, тогда $\dot U_2 = U_2 e^{j\varphi_2}$.

Находим φ_2 и $\dot U_2$:

$$\cos\varphi_2 = \frac{P_2}{U_2 I_2} = \frac{100}{100\cdot 1} = 1\ ,\ \text{следовательно,}\ \varphi_2 = 0\ \text{и}$$

$$\dot U_2 = U_2 = 100\ \text{В}.$$

Определим $\dot U_1$ и $\dot I_1$ из системы уравнений четырехполюсника в форме $|A|$:

$$\dot U_1 = A_{11}\dot U_2 + A_{12}\dot I_2 = (1+j2)\cdot 100 + (100+j\cdot 50)\cdot 1 = 200 + j\,250\ \text{В};$$

$$\dot I_1 = A_{21}\dot U_2 + A_{22}\dot I_2 = \frac{1}{50}\cdot 100 + (1-j)\cdot 1 = 3 - j\,\text{А}.$$

Задача I.5. Заданы три коэффициента формы $|A|$ пассивного четырехполюсника:

$$A_{11} = 1 + j\ ;\ A_{22} = 1 - j\ ;\ A_{21} = 0{,}1.$$

Определить сопротивления П-образной схемы замещения, меру передачи и передаточную функцию по току в режиме короткого замыкания, а также характеристические сопротивления.

Р е ш е н и е.

I. Определим коэффициент A_{12} четырехполюсника из условия пассивности (I.4):

$$(1+j)(1-j) - A_{12}\cdot 0{,}1 = 1\ ,\ \text{откуда}\ A_{12} = 10\ \text{Ом}.$$

2. Найдем параметры П-образной схемы замещения (рис. 6а):

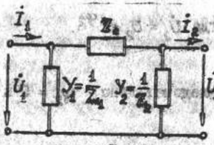
$$Z_0 = A_{12} = 10\ \text{Ом};$$

$$Y_1 = \frac{1}{Z_1} = \frac{A_{22}-1}{A_{12}} = \frac{1-j-1}{10} = -0{,}1j\ \ \text{См};$$

$$Y_2 = \frac{1}{Z_2} = \frac{A_{11}-1}{A_{12}} = \frac{1+j-1}{10} = 0{,}1j\ \ \text{См};$$

$$Z_1 = 10j\ \ \text{Ом}\ ,\ \ Z_2 = -10j\ \ \text{Ом}.$$

Схема замещения четырехполюсника представлена на рис. 6б.



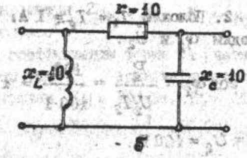


Рис. 6

3. Определим меру передачи:

$$e^{g} = e^{\alpha+jb} = \sqrt{A_{11}A_{22}} + \sqrt{A_{12}A_{21}} = \sqrt{(1+j)(1-j)} + \sqrt{10\cdot 0,1} = \sqrt{2} + \sqrt{1} \approx 2,41 ,$$

$g = \alpha + jb = \ln 2,41 + j0$, откуда $\alpha = \ln 2,41$ Нп, $b = 0$.

4. Найдем передаточную функцию по току:

$$K_I(j\omega) = \frac{\dot I_2}{\dot I_1} = \frac{\dot I_2}{A_{21}\dot U_2 + A_{22}\dot I_2} = \frac{1}{A_{21}Z_2 + A_{22}}$$

В режиме короткого замыкания вторичных зажимов сопротивление $Z_2 = 0$; тогда

$$K_{I_{к.з}}(j\omega) = \frac{1}{A_{22}} = \frac{1}{1-j} = 0,5 + j0,5 = 0,5\sqrt{2}\, e^{j\frac{\pi}{4}}.$$

5. Определим характеристические сопротивления:

$$Z_{1c} = \sqrt{\frac{A_{11}A_{12}}{A_{21}A_{22}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}\, e^{j\frac{\pi}{4}}\cdot 10}{0,1\sqrt{2}\, e^{-j\frac{\pi}{4}}}} = \sqrt{100\, e^{j\frac{\pi}{2}}} = 10\, e^{j\frac{\pi}{4}} = 5\sqrt{2} + j\,5\sqrt{2} \text{ Ом},$$

$$Z_{2c} = \sqrt{\frac{A_{22}A_{12}}{A_{21}A_{11}}} = 10\, e^{-j\frac{\pi}{4}} = 5\sqrt{2} - j\,5\sqrt{2} \text{ Ом}.$$

Задача 1.6. Определить повторное сопротивление и меру передачи (рис. 7, $L = 0,1$ Гн, $C = 10$ мкФ, $\omega = 10^3$ с$^{-1}$).

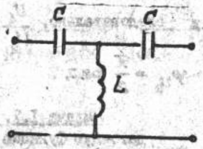


Рис. 7

Решение.

1. Рассматривая схему четырехполюсника как Т-образную, можно записать:

$$Z_1 = Z_2 = -jx_C = -j\frac{1}{\omega C} = -j\frac{1}{10^3\cdot 10\cdot 10^{-6}} = -j100 \text{ Ом};$$

$$Z_0 = j\omega L = j10^3\cdot 0,1 = j\,100 \text{ Ом}.$$

2. Найдем коэффициенты формы $|A|$ через параметры Т-образной схемы замещения:

$$A_{11} = A_{22} = 1 + \frac{Z_1}{Z_0} = 1 + \frac{-j100}{j100} = 1 - 1 = 0;$$

$$A_{12} = Z_1 + Z_2 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_0} = -j100 - j100 + \frac{(-j100)(-j100)}{j\cdot 100} = -j100 \text{ Ом};$$

$$A_{21} = \frac{1}{Z_0} = \frac{1}{j100} = -j0,01 \text{ См}.$$

3. Повторное (характеристическое) сопротивление симметричного четырехполюсника определим по формуле

$$Z_c = \sqrt{\frac{A_{12}}{A_{21}}} = \sqrt{\frac{-j100}{-0,01j}} = 100 \text{ Ом}.$$

4. Найдем меру передачи $g = \alpha + jb$. Для этого воспользуемся формулой

$$e^{g} = A_{11} + \sqrt{A_{12}A_{21}} = 0 + \sqrt{(-j100)(-0,01j)} = 0 + \sqrt{-1} = j = 1\, e^{j\frac{\pi}{2}}.$$

С другой стороны, $e^{\alpha+jb} = e^{\alpha}\cdot e^{jb}$, откуда $e^{\alpha} = 1$, $\alpha = 0$,

$e^{jb} = e^{j\frac{\pi}{2}}$, $b = \frac{\pi}{2}$ рад ; следовательно, $\frac{U_1}{U'_2} = e^{a} = 1$,

т.е. $U_1 = U_2$; $b = \psi_{U_1} - \psi_{U_2} = \frac{\pi}{2}$ рад.

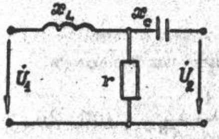


Рис. 8

Задача 1.7. Определить передаточную функцию по напряжению четырехполюсника в режиме холостого хода вторичных зажимов. Построить качественно амплитудно-частотную (АЧХ) и фазочастотную (ФЧХ) характеристики для $K_{U_{xx}}(j\omega)$ (рис. 8, $r = x_L = x_C = 10$ Ом, $\omega = 10^3$ рад/с).

Решение.

1. Определим передаточную функцию по напряжению. В схеме с нагрузкой

$$K_U(j\omega) = \frac{\dot U_2}{\dot U_1} = \frac{\dot U_2}{A_{11}\dot U_2 + A_{12}\dot I_2} = \frac{Z_2}{A_{11}Z_2 + A_{12}} = K_U(\omega)\, e^{j\varphi_U(\omega)},$$

где $K_U(\omega)$ – амплитудно-частотная характеристика (АЧХ); $\varphi_U(\omega)$ – фазочастотная характеристика (ФЧХ).

В режиме холостого хода вторичных зажимов четырехполюсника ($Z_2 = \infty$), имеем

$$K_U(j\omega)_{xx} = \frac{\dot U_2}{\dot U_1} = \frac{1}{A_{11}}.$$

Коэффициент A_{11} определим через параметры Т-образной схемы замещения:

$$A_{11} = 1 + \frac{Z_1}{Z_0} = 1 + \frac{jx_L}{r} = \frac{r + j\omega L}{r} = \frac{10 + j\omega\, 0{,}01}{10} = \sqrt{\frac{100 + \omega^2 10^{-4}}{100}}\, e^{j\,\mathrm{arctg}\,10^{-3}\omega};$$

$$\frac{1}{A_{11}} = K_U(j\omega_{xx}) = \frac{10}{10 + j\omega\, 0{,}01} = \sqrt{\frac{100}{100 + 10^{-4}\omega^2}}\, e^{-j\,\mathrm{arctg}\,10^{-3}\omega} = K_U(\omega)\, e^{j\varphi_U(\omega)}.$$

2. Графики $K_U(\omega)$ и $\varphi_U(\omega)$ приведены на рис. 9а и б соответственно.

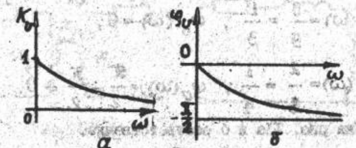


Рис. 9

Задача 1.8. Для схемы (рис. 10) построить качественно АЧХ и ФЧХ передаточной функции по напряжению четырехполюсника в режиме холостого хода вторичных зажимов.

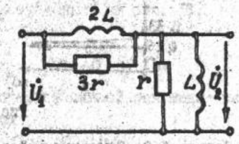


Рис. 10

Решение.

1. Определим передаточную функцию по напряжению в режиме ХХ

$$K_{U_{xx}}(j\omega) = \frac{\dot U_2}{\dot U_1} = \frac{Z_{rL}}{Z_{вх}} = \frac{\frac{r\cdot j\omega L}{r + j\omega L}}{\frac{r\cdot j\omega L}{r + j\omega L} + \frac{3r\cdot j2\omega L}{3r + j2\omega L}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{r + j\omega L}}{\frac{1}{r + j\omega L} + \frac{6}{3r + 2j\omega L}} = \frac{1}{1 + \frac{(r + j\omega L)6}{3r + 2j\omega L}} = \frac{3r + 2j\omega L}{9r + 8j\omega L};$$

АЧХ:

$$K_{U_{xx}}(\omega)=\left|K_{U_{x.x}}(j\omega)\right|=\left|\frac{3r+2j\omega L}{9r+8j\omega L}\right|;$$

ФЧХ:

$$\varphi_U(\omega)=\mathrm{arctg}\frac{Jm[K_U(j\omega)]}{Re[K_U(j\omega)]}=\mathrm{arctg}\frac{2\omega L}{3r}-\mathrm{arctg}\frac{8\omega L}{9r}.$$

2. Строим АЧХ и ФЧХ передаточной функции $K_{U_{x.x}}(j\omega)$:

при $\omega=0$ $\quad K_U(\omega)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$; $\varphi_U(\omega)=0$;

при $\omega=\infty$ $\quad K_U(\omega)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$; $\varphi_U(\omega)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=0$.

АЧХ и ФЧХ приведены на рис. 11а и б соответственно.

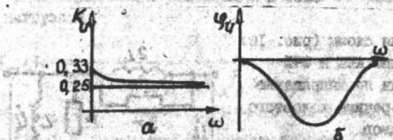


Рис. 11

Задача 1.9. Симметричный четырехполюсник нагружен на повторное сопротивление Z_C. Известны данные опытов холостого хода и короткого замыкания при питании со стороны первичных зажимов: $\dot U_{1X}=100e^{j60^\circ}$; $\dot I_{1X}=10e^{j30^\circ}$; $\dot U_{1K}=100e^{j30^\circ}$; $\dot I_{1K}=10e^{-j30^\circ}$.
Определить входное сопротивление четырехполюсника.

Р е ш е н и е.

1. Определим сопротивления Z_{1X} и Z_{1K}:

$$Z_{1X}=\frac{\dot U_{1X}}{\dot I_{1X}}=\frac{100e^{j60^\circ}}{10e^{j30^\circ}}=10e^{j30^\circ}\ \text{Ом};$$

$$Z_{1K}=\frac{\dot U_{1K}}{\dot I_{1K}}=\frac{100e^{j30^\circ}}{10e^{-j30^\circ}}=10e^{j60^\circ}\ \text{Ом}.$$

2. Найдем входное сопротивление, которое для симметричного четырехполюсника равно повторному сопротивлению:

$$Z_{вх}=Z_C=\sqrt{Z_{1X}\cdot Z_{1K}}=\sqrt{10e^{j30^\circ}\cdot 10e^{j60^\circ}}=10e^{j45^\circ}\ \text{Ом}.$$

Задача 1.10. Определить коэффициенты форм $|A|$ четырехполюсника (рис. 12, $r_1=r_2=10$ Ом, $x_{L_1}=x_{L_2}=20$ Ом, $x_M=10$ Ом).

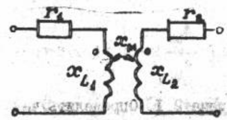


Рис. 12

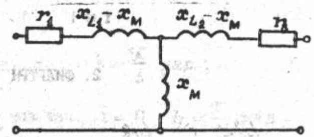


Рис. 13

Р е ш е н и е.

1. Выполним развязку схемы, т.е. заменим индуктивные связи электрическими. Схема примет вид, изображенный на рис. 13. Сопротивления соответственно равны:

$$x_{L_1}-x_M=20-10=10\ \text{Ом};\quad x_{L_2}-x_M=20-10=10\ \text{Ом}.$$

2. Сравним схему рис. 13 с Т-образной схемой замещения четырехполюсника (см. рис. 4а). Получим:

$$Z_1=r_1+j(x_{L_1}-x_M)=10+j10\ \text{Ом};$$

$$Z_2=r_2+j(x_{L_2}-x_M)=10+j10\ \text{Ом};$$

$$Z_0=jx_M=j10\ \text{Ом}.$$

3. Определим коэффициенты формы $|A|$ через параметры Т-образной схемы замещения:

$$A_{11}=1+\frac{Z_1}{Z_0}=1+\frac{10+j10}{j10}=\frac{j10+10+j10}{j10}=\frac{10+j20}{j10}=2-j=A_{22},$$

так как четырехполюсник симметричный.

$$A_{12}=Z_1+Z_2+\frac{Z_1Z_2}{Z_0}=10+j10+10+j10+\frac{(10+j10)(10+j10)}{j10}=40+j20\ \text{Ом},$$

$$A_{21} = \frac{1}{Z_0} = \frac{1}{j10} = -0{,}1j \ \text{Ом}.$$

Проверка:

$$A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = (2-j)(2-j) - (40+j20)(-0{,}1j) = 1;$$

$$1 = 1.$$

2. ФИЛЬТРЫ

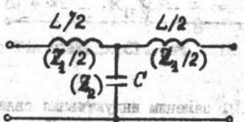


Рис. I4

Задача 2.I. Определить частоту среза ω_c Т-образного фильтра, а также $Z_{ст}$ и g при частотах $\omega_1 = \frac{\omega_c}{2}$ и $\omega_2 = 2\omega_c$ (рис. I4, $L/2 = 0{,}5$ Гн, $C = 1$ мкф).

Р е ш е н и е.

I. Дана Т-образная схема фильтра нижних частот (ФНЧ) (см. рис. I4); фильтр типа "k", так как выполняется условие

$$Z_1 Z_2 = j\omega L \cdot \frac{1}{j\omega C} = \frac{L}{C} = k^2 \quad \text{или} \quad k = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Граничные частоты полосы пропускания для ФНЧ соответственно равны:

$$\omega = 0 \quad \text{и} \quad \omega_c = \frac{2}{\sqrt{LC}} = \frac{2}{\sqrt{1 \cdot 10^{-6}}} = 2 \cdot 10^3 = 2\,000 \ c^{-1}.$$

2. Определим $Z_{ст}$ и g при частоте $\omega_1 = \frac{\omega_c}{2} = 1000 \ c^{-1}$.

$0 < \omega_1 < \omega_c$ – полоса пропускания ФНЧ.

$$Z_{ст(\omega_1)} = \sqrt{Z_1 Z_2}\sqrt{1 + \frac{Z_1}{4Z_2}} = k\sqrt{1 - \frac{\omega^2 LC}{4}} = k\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{L}{C}}\sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2} = 10^3 \ \frac{1}{2}\sqrt{3} = 500\sqrt{3} \ \text{Ом}.$$

Характеристическое сопротивление в полосе пропускания имеет активный характер.

Находим меру передачи $g = \alpha + jb$. В полосе пропускания $\alpha = 0$, $\cos b = A_{11}$, откуда

$$b = \arccos A_{11} = \arccos\left(1 + \frac{Z_1}{2Z_2}\right) = \arccos\left(1 - \frac{\omega^2 LC}{2}\right) =$$

$$= \arccos\left[1 - 2\frac{\omega^2}{\omega_c^2}\right] = \arccos 0{,}5 = \frac{\pi}{3} \ \text{рад};$$

$$g = 0 + j\frac{\pi}{3}; \quad U_2 = U_1, \ \text{так как} \ \alpha = 0, \ b = \frac{\pi}{3} \ \text{рад}.$$

3. Определим $Z_{ст}$ и g при частоте $\omega_2 = 2\omega_c = 4000 \ c^{-1}$

$\omega_2 > \omega_c$ – полоса задержания ФНЧ.

$$Z_{ст(\omega_2)} = \sqrt{\frac{L}{C}}\sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2} = 1000\sqrt{3}\,j \ \text{Ом}.$$

Характеристическое сопротивление в полосе задержания имеет индуктивный характер.

Находим меру передачи g. В полосе задержания

$$\alpha = \operatorname{arch}(-A_{11}) = \operatorname{arch}\left[\frac{\omega^2 LC}{2} - 1\right] = \operatorname{arch}\left[2\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 - 1\right] =$$

$$= \operatorname{arch} 7 \approx 2{,}45 \ \text{Нп},$$

$$b = \pi = \text{const}.$$

Задача 2.2. Определить частоту среза ω_c П-образного фильтра, а также $Z_{сп}$ и g при частотах $\omega_1 = \omega_c/2$ и $\omega_2 = 2\omega_c$ (рис. I5, $L = 100$ мГн, $C/2 = 5$ мкф).

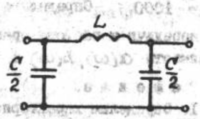


Рис. I5

Решение.

1. Схема ФНЧ П-образная:

$$\omega_c = \frac{2}{\sqrt{LC}} = \frac{2}{\sqrt{0,1 \cdot 10 \cdot 10^{-6}}} = 2\,000\ c^{-1};$$

2. $\omega_1 = \dfrac{\omega_c}{2} = 1000\ c^{-1}$ – полоса пропускания ФНЧ.

$$Z_{cп} = \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} = \sqrt{\frac{0,1}{10^{-5}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{100}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{200}{\sqrt{3}}\ \text{Ом}.$$

Характеристическое сопротивление имеет активный характер.
Мера передачи:

$$g = \alpha + jb;\ \alpha = 0;\ b = \arccos A_{11} = \arccos\left[1 - 2\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right] = \frac{\pi}{3}\ \text{рад}.$$

3. $\omega_2 = 2\omega_c = 4000\ c^{-1}$ – полоса задержания ФНЧ.

$$Z_{cп} = \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} = -\frac{100}{\sqrt{3}}\,j\ \ \text{Ом}.$$

Характеристическое сопротивление имеет емкостной характер.
Мера передачи:

$$g = \alpha + jb;$$

$$\alpha = \operatorname{arch}(-A_{11}) = \operatorname{arch}\left[2\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 - 1\right] = \operatorname{arch}[7] = 2,45\ \text{Нп};$$

$$b = \pi\ \text{рад} = \text{const}.$$

Задача 2.3. Т-образный фильтр типа k имеет на частоте $\omega = 1000\ c^{-1}$ следующие значения сопротивлений: $Z_{1x} = 1000j$, $Z_{1K} = -1000j$. Определить характеристическое сопротивление, меру передачи и частоту среза фильтра. Построить качественные зависимости $\alpha(\omega)$, $b(\omega)$ и $Z_{ст}(\omega)$.

Решение.

1. Определим характеристическое сопротивление фильтра:

$$Z_{ст} = \sqrt{Z_{1x} Z_{1K}} = \sqrt{10^3 j(-10^3 j)} = 1\,000\ \text{Ом}.$$

Характеристическое сопротивление имеет активный характер.

2. Вычислим меру передачи $g = \alpha + jb$. Для этого воспользуемся формулой

$$e^{2g} = \frac{1+\operatorname{th} g}{1-\operatorname{th} g} = \frac{1+\sqrt{\frac{Z_{1K}}{Z_{1x}}}}{1-\sqrt{\frac{Z_{1K}}{Z_{1x}}}} = \frac{1+j}{1-j} = j = e^{j\frac{\pi}{2}},$$

$$2g = j\frac{\pi}{2} = 2(\alpha + jb),\quad g = 0 + j\frac{\pi}{4}.$$

Следовательно, $\alpha = 0$, $b = \frac{\pi}{4}$.

Так как $b = +\frac{\pi}{4}$, то это фильтр нижних частот, причем он работает в полосе пропускания ($\alpha = 0$).

3. Определим частоту среза фильтра.

Так как $\alpha = 0$ произведение $\operatorname{sh}\alpha \sin b = 0$, $\operatorname{ch}\alpha = 1$.

$$\operatorname{ch}\alpha \cos b = A_{11} = 1 + \frac{Z_1}{2Z_2} = 1 - 2\frac{\omega^2}{\omega_c^2}$$ (см. схему на рис. 14).

$$\cos b = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 - 2\frac{\omega^2}{\omega_c^2},\ \text{откуда}\ \ 2\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \simeq 0,295;$$

$$\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 \simeq 0,1475;\quad \frac{\omega}{\omega_c} \simeq 0,384.$$

По условию $\omega = 1000\ c^{-1}$, следовательно, $\omega_c = \dfrac{1000}{0,384} \simeq 2604\ c^{-1}$. Таким образом, $\omega_c > \omega$; это подтверждает, что фильтр – нижних частот, работающий в полосе пропускания. Графики зависимостей $\alpha(\omega)$, $b(\omega)$ приведены на рис. 15а и $Z_{ст}(\omega)$ на рис. 15б.

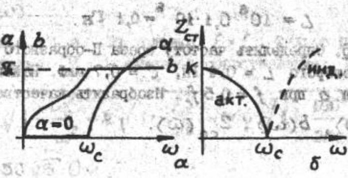


Рис. 15

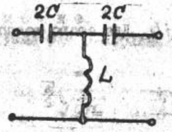


Рис. 17

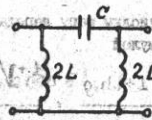


Рис. 18

Задача 2.4. Определить элементы (L, C) Т-образного фильтра верхних частот (рис. 17), работающего на нагрузку, сопротивление которой r = 1000 Ом, и обладающего частотой среза $\omega_c = 5000$ с$^{-1}$.

Р е ш е н и е. В расчетах коэффициент k выбирается из условия согласования сопротивления нагрузки с характеристическим сопротивлением фильтра при определенной частоте (для ФВЧ это $\omega = \infty$):

$$k = \sqrt{\frac{L}{C}} = r = 1000 \text{ Ом}.$$

Частота среза ФВЧ определяется по формуле

$$\omega_c = \frac{1}{2\sqrt{LC}} = 5000 \text{ с}^{-1}.$$

Решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{L}{C}} = 1000, \\ \frac{1}{2\sqrt{LC}} = 5000, \end{cases}$$

откуда определяем

$$C = \frac{1}{10\cdot 10^6}\,[\Phi] = 0{,}1 \text{ мкФ};$$

$$L = 10^6 \cdot 0{,}1\cdot 10^{-6} = 0{,}1 \text{ Гн}.$$

Задача 2.5. Определить частоту среза П-образного ФВЧ (рис. 18), у которого L = 0,4 Гн, C = 0,7 мкФ. Найти коэффициент затухания a при $f = 0{,}5 f_c$. Изобразить качественно зависимости $a(\omega)$, $b(\omega)$, $Z_{cп}(\omega)$.

Р е ш е н и е.

1. Определим частоту среза ФВЧ:

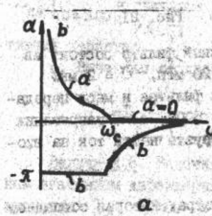
$$\omega_c = \frac{1}{2\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\sqrt{0{,}4\cdot 0{,}7\cdot 10^{-6}}} \simeq 945 \text{ с}^{-1}.$$

2. Вычислим коэффициент затухания. По условию $\omega = 0{,}5\omega_c = 472{,}5$ с$^{-1}$. Так как $\omega < \omega_c$, то это – полоса задерживания ФВЧ. В полосе задерживания

$$a = \operatorname{arch}\left|1 + \frac{Z_1}{2Z_2}\right| = \operatorname{arch}\left|1 - 2\frac{\omega_c^2}{\omega^2}\right| = \operatorname{arch}\left|1 - 2\frac{\omega_c^2}{\frac{1}{4}\omega_c^2}\right| =$$

$$= \operatorname{arch}|1-8| = \operatorname{arch}|-7| = \operatorname{arch} 7 = 2{,}45 \text{ Нп}.$$

Графики зависимостей $a(\omega)$, $b(\omega)$ и $Z_{cп}(\omega)$ приведены на рис. 19а и б соответственно.



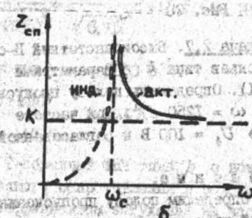


Рис. 19

Задача 2.6. Фильтр верхних частот имеет f_c = 100 Гц, $Z_н$ = 500 Ом. Определить Z_c при f = 200 Гц для Т- и П-образных схем замещения. Построить качественно зависимости $Z_{cт}(\omega)$ и $Z_{cп}(\omega)$.

Р е ш е н и е. По условию $f > f_c$. Фильтр работает в полосе пропускания; Z_c – активное сопротивление; $k = Z_н$ = 500 Ом.

$$Z_{cт} = k\sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}} = k\sqrt{1 - \frac{f_c^2}{f^2}} = 500\sqrt{1 - \frac{100^2}{200^2}} = \frac{500}{2}\sqrt{3} =$$

$$= 250\sqrt{3} \text{ Ом},$$

$$Z_{сп} = k\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\omega_c^2}{\omega^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{f_c^2}{f^2}}} = \frac{500}{\sqrt{1-\frac{100^2}{200^2}}} = \frac{500\cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{1000}{\sqrt{3}}\ Ом.$$

Характеристики $Z_{ст}(\omega)$ и $Z_{сп}(\omega)$ представлены на рис. 20.

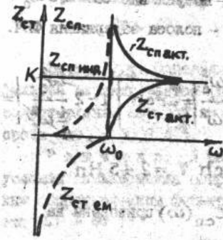


Рис. 20

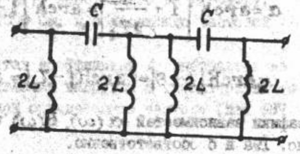


Рис. 21

Задача 2.7. Высокочастотный П-образный фильтр состоит из двух звеньев типа k с параметрами L = 20 мГн, C = 2 мкФ (рис. 21). Определить полосу пропускания фильтра и меру передачи при ω = 1250 $с^{-1}$. При частоте ω = 5000 $с^{-1}$, напряжении на входе U_1 = 100 В и согласованной нагрузке найти ток на входе.

Р е ш е н и е.

1. Определим полосу пропускания фильтра, которая совпадает с полосой пропускания одного звена:

$$\omega_c = \frac{1}{2\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\sqrt{20\cdot10^{-3}\cdot2\cdot10^{-6}}} = \frac{10^4}{4} = 2\,500\ с^{-1}.$$

2. Вычислим меру передачи $g = a + jb$. В полосе задержания ФВЧ при ω = 1250 $с^{-1}$ коэффициент затухания a одного звена определяется по формуле

$$\mathrm{ch}\,a = -1 + \frac{2}{\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2} = -1+\frac{2}{(0,5)^2} = 7,$$

откуда

$$a = \mathrm{arch}\ 7 = 2,45\ Нп;$$

коэффициент фазы

$$b = \pi\ рад = \mathrm{const}.$$

Для фильтра, состоящего из двух звеньев, значения a и b удваиваются.

3. Определим характеристические сопротивления фильтра. При согласованной нагрузке входное сопротивление равно характеристическому на данной частоте для одного звена

$$Z_{вх}\big|_{\omega=5000} = Z_{сп}\big|_{\omega=5000},$$

$$Z_{сп}\big|_{\omega=1250} = \frac{k}{\sqrt{1-\frac{1}{\nu^2}}} = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{\sqrt{1-\frac{1}{\nu^2}}} = \frac{\sqrt{\frac{20\cdot10^{-3}}{2\cdot10^{-6}}}}{\sqrt{1-\frac{1}{0,25}}} = j\cdot\frac{100}{\sqrt{3}}\ Ом$$

имеет индуктивный характер.

$$Z_{сп}\big|_{\omega=5000} = \frac{k}{\sqrt{1-\frac{1}{\nu^2}}} = \frac{100}{\sqrt{1-(0,5)^2}} = \frac{100}{\sqrt{0,75}} \approx 115,5\ Ом$$

имеет активный характер.

4. Вычислим входной ток при ω = 5000 $с^{-1}$:

$$I_1 = \frac{U_1}{Z_{сп}\big|_{\omega=5000}} = \frac{100}{115,5} = 0,866\ А.$$

Задача 2.8. Рассчитать Т-образный ФНЧ типа k с номинальным значением характеристического сопротивления в полосе пропускания $Z_{ст}$ = 600 Ом и коэффициентом затухания на частоте f = 100 Гц, равным a = 40 дБ.

Р е ш е н и е. По условию согласования $r_н = Z_{ст} = k$

$$r_н = \sqrt{\frac{L}{C}} = 600,\ \text{откуда}\ \frac{L}{C} = 36\cdot10^4.$$

Выразим коэффициент затухания a в неперах:

$$a_{Нп} = 0,115\,a_{дБ} = 0,115\cdot40 = 4,6\ Нп,$$

$$\mathrm{ch}\,a = -\left(1+\frac{Z_1}{2Z_2}\right) = -\left(1+\frac{j\omega L}{-j2\frac{1}{\omega C}}\right) = -\left(1-\frac{\omega^2 LC}{2}\right) = \mathrm{ch}\,4,6 = 49,74.$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 100\ c^{-1};$$

$$49{,}74 = -\left(1 - \frac{4\pi^2 \cdot 10^4 LC}{2}\right), \text{ откуда } LC \approx 2{,}57 \cdot 10^{-4}.$$

Решив систему уравнений,

$$\begin{cases} \frac{L}{C} = 36 \cdot 10^4, \\ LC = 2{,}57 \cdot 10^{-4}, \end{cases}$$

получим L = 9,36 Гн; $C = 0{,}26 \cdot 10^{-4}$ Ф.

3. ЦЕПИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ (ДЛИННЫЕ ЛИНИИ)

Задача 3.1. Коэффициент распространения длинной линии

$$\gamma = 0{,}2 \cdot e^{j\frac{\pi}{4}} = 0{,}1414 + j\,0{,}1414\ \frac{1}{\text{км}}.$$

Определить фазовую скорость падающих и отраженных волн в линии, если источник питания работает на частоте f = 1000 Гц.

Р е ш е н и е. Коэффициент распространения

$$\gamma = \alpha + j\beta = 0{,}1414 + j\,0{,}1414\ \frac{1}{\text{км}},$$

следовательно, β = 0,1414.

Определим фазовую скорость падающей волны:

$$v_\Phi = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi f}{\beta} = \frac{2\pi \cdot 1000}{0{,}1414} \approx 44\,400\ \frac{\text{км}}{c}.$$

Вычислим фазовую скорость отраженной волны:

$$v_\Phi = -\frac{\omega}{\beta} = -\frac{2\pi f}{\beta} = -44\,400\ \frac{\text{км}}{c}.$$

Задача 3.2. Параметры длинной линии (в расчете на I км длины) равны: r_0 = 99 Ом, L_0 = 0,00222 Гн, $g_0 = 0{,}0557 \times 10^{-3}$ См, $C_0 = 0{,}063 \times 10^{-6}$ Ф. Линия подключена к источнику постоянного тока. Определить коэффициент распространения.

Р е ш е н и е. Так как ω = 0, то $\omega L_0 = 0$ и $\omega C_0 = 0$. Тогда коэффициент распространения γ будет равен

$$\gamma = \sqrt{(r_0 + j\omega L_0)(g_0 + j\omega C_0)} = \sqrt{r_0 \cdot g_0} = \sqrt{99 \cdot 0{,}0577 \cdot 10^{-3}} \approx$$

$$\approx \sqrt{0{,}0057} \approx 0{,}0755\ \frac{1}{\text{км}}.$$

Задача 3.3. Параметры длинной линии те же, что в задаче 3.2. Найти волновое сопротивление линии на частоте f = 1000 Гц.

Р е ш е н и е. Волновое сопротивление линии определяется по формуле

$$Z_B = \sqrt{\frac{r_0 + j\omega L_0}{g_0 + j\omega C_0}}, \quad \text{где } \omega = 2\pi f.$$

Вычислим $Z_B = z_B e^{j\varphi_B}$.

$$Z_B = \sqrt{\frac{99 + j\,2\pi \cdot 1000 \cdot 0{,}0222}{0{,}0557 \cdot 10^{-3} + j\,2\pi \cdot 1000 \cdot 0{,}063 \cdot 10^{-6}}} \approx 497{,}6\ e^{-j37^\circ}\ \text{Ом}.$$

Модуль и фазу волнового сопротивления можно также определить по формулам:

$$z_B = \sqrt[4]{\frac{r_0^2 + \omega^2 L_0^2}{g^2 + \omega^2 C_0^2}} = 497{,}6\ \text{Ом};$$

$$\varphi_B = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}\frac{\omega L_0}{r_0} - \operatorname{arctg}\frac{\omega C_0}{g_0}\right) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}\frac{2\pi f L_0}{r_0} - \right.$$

$$\left. - \operatorname{arctg}\frac{2\pi f C_0}{g_0}\right) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}\frac{2\pi \cdot 1000 \cdot 0{,}00222}{99} - \operatorname{arctg}\frac{2\pi \cdot 1000 \cdot 0{,}063 \cdot 10^{-6}}{0{,}0557 \cdot 10^{-3}}\right) =$$

$$= -37^\circ.$$

Задача 3.4. Линия без потерь работает в режиме согласования с нагрузкой. Длина линии l = 10 м. Нарисовать график распределения действующего напряжения падающей волны $\dot{U}$ вдоль линии, если в конце ее оно равно 200 В. Объяснить полученный результат.

Р е ш е н и е. Так как линия работает в режиме согласования с нагрузкой, т.е. $Z_2 = Z_c$, то коэффициент отражения в конце линии

$$n_2 = \frac{Z_2 - Z_c}{Z_2 + Z_c} = 0$$

При этом в линии присутствует только прямая волна, отраженная - отсутствует. Действующее напряжение $U = U_m/\sqrt{2} = 200 = const$. График распределения $U(x)$ показан на рис. 22.

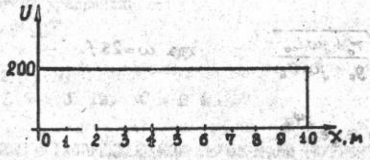


Рис. 22

Задача 3.5. Воздушная линия без потерь имеет следующие параметры: волновое сопротивление $Z_в = 200$ Ом, длина волны l = 10 м, напряжение на входе $U_1 = 1000$ В. Линия разомкнута на конце. Записать мгновенные значения тока $i_2(t)$ и напряжения $u_2(t)$. $l = 6$ м, длина линии

Решение.

1. Так как линия разомкнута на конце, она находится в режиме холостого хода. Следовательно, $Z_н = \infty$, $i_2(t) = 0$.

2. Определим $\dot{U}_2$. Для линии без потерь имеем

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 \cos\beta l;$$

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\cdot 3{,}14}{6} = \frac{\pi}{3} = 60^\circ;$$

$$\cos\beta l = \cos\frac{180^\circ}{3}\cdot 10 = \cos 600^\circ = \cos(240^\circ) = -\frac{1}{2};$$

$$\dot{U}_2 = \frac{\dot{U}_1}{\cos\beta l} = \frac{1000}{-\frac{1}{2}} = -2000 \text{ В}.$$

3. Запишем мгновенное значение напряжения:

$$u_2(t) = -2000\sqrt{2}\sin\omega t = 2000\sqrt{2}\sin(\omega t + 180^\circ) \text{ В}.$$

Задача 3.6. Воздушная линия без потерь длиной l = 10 м имеет волновое сопротивление $Z_в = 200$ Ом, длину волны $\lambda = 6$ м.

На входе линии напряжение $U_1 = 1000$ В. Определить ток $\dot{I}_1$ в начале линии, если линия замкнута на конце.

Решение.

1. Так как линия замкнута на конце, она находится в режиме короткого замыкания (КЗ). Следовательно, $Z_н = 0$, $\dot{U}_2 = 0$. Уравнения линии без потерь в режиме КЗ на конце линии имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} \dot{U}_1 &= j z_в \dot{I}_2 \sin\beta l \\ \dot{I}_1 &= \dot{I}_2 \cos\beta l \end{aligned}\right\}, \text{ откуда } \dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_1}{j z_в \sin\beta l};$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1 \cos\beta l}{j z_в \sin\beta l} = \frac{\dot{U}_1}{j z_в \operatorname{tg}\beta l}.$$

Определим коэффициент фазы β, рад:

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3};$$

$$\cos\beta l = \cos 600^\circ = \cos 240^\circ = -\frac{1}{2}, \ \operatorname{tg}\beta l = \operatorname{tg} 240^\circ = \sqrt{3}.$$

Вычислим ток $\dot{I}_1$, А:

$$I_1 = \frac{5}{j\operatorname{tg}\beta l} = \frac{5\cdot j}{j(\sqrt{3})j} = -\frac{5}{\sqrt{3}} j;$$

Задача 3.7. Первичные параметры воздушной линии при частоте $f = 800$ Гц имеют следующие значения:

$$r_0 = 1\ \frac{\text{Ом}}{\text{м}};\quad L_0 = 0{,}2\cdot 10^{-3}\ \frac{\text{Гн}}{\text{м}};\quad C_0 = 0{,}2\cdot 10^{-9}\ \frac{\text{Ф}}{\text{м}};\quad g_0 = 10^{-6}\ \frac{\text{См}}{\text{м}}.$$

Длина линии l = 100 км. Определить модуль и фазу волнового сопротивления линии, коэффициент затухания и коэффициент фазы, фазовую скорость и длину волны.

Решение.

1. Определим волновое сопротивление линии:

$$Z_в = \sqrt{\frac{r_0 + j2\pi f L_0}{g_0 + j2\pi f C_0}} = \sqrt{\frac{1 + j2\pi\cdot 800\cdot 0{,}2\cdot 10^{-3}}{10^{-6} + j2\pi\cdot 800\cdot 0{,}2\cdot 10^{-9}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1+j}{10^{-6}(1+j)}} = \sqrt{\frac{1}{10^{-6}}} = 10^3 \ \text{Ом}.$$

Волновое сопротивление имеет активный характер,

$$Z_в = Z_в = 1000 \ \text{Ом}; \ \varphi_{Z_в} = 0.$$

2. Вычислим коэффициент затухания (α) и коэффициент фазы (β):

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(r_0 + j\omega L_0)(g_0 + j\omega C_0)} =$$

$$= \sqrt{(1 + j2\pi \cdot 800 \cdot 0{,}2 \cdot 10^{-3}) \cdot (10^{-6} + j2\pi \cdot 800 \cdot 0{,}2 \cdot 10^{-9})} =$$

$$= \sqrt{10^{-6}(1+j)(1+j)} = 10^{-3} + j10^{-3} \ 1/м, \quad \alpha = 10^{-3}, \ \beta = 10^{-3}.$$

3. Определим фазовую скорость и длину волны:

$$v_\varphi = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi f}{\beta} = \frac{2\pi \cdot 800}{10^{-3}} = 6{,}28 \cdot 800 \cdot 10^3 = 5024\,000 \ \frac{м}{с};$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2 \cdot 3{,}14}{10^{-3}} = 6{,}28 \cdot 10^3 = 6\,280 \ м.$$

Задача 3.8. Длина линии без потерь l = 12 м, длина падающей и стоячей волн напряжения в линии λ = 8 м. Линия в конце находится в режиме холостого хода, величина напряжения между выходными клеммами U_2 = 100 В. Чему равно напряжение в точке линии, отстоящей на 2 м от ее начала? Изобразить график распределения действующего значения стоячей волны вдоль линии.

Р е ш е н и е.

1. Для линии без потерь в режиме холостого хода имеем:

$$\dot U = \dot U_2 \cos \beta x', \quad \text{где} \quad x' = l - x;$$

$$\dot U = \dot U_2 \cos \frac{2\pi}{\lambda}(l - x) = \dot U_2 \cos \frac{\pi}{4}(12 - 2) = 100 \cos \frac{5\pi}{2} = 0,$$

где $\beta = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{2\pi}{8} = \dfrac{\pi}{4}$.

Напряжение в точке линии, отстоящей на 2 м от ее начала, равно нулю.

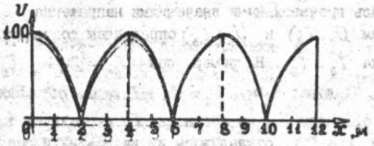


Рис. 23

2. $\dfrac{l}{\lambda} = \dfrac{12}{8} = 1{,}5$, т.е. в линии умещается 1,5 волны.

График зависимости $U(x)$ приведен на рис. 23.

4. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Задача 4.1. Нелинейные резисторы вольт-амперные характеристики (ВАХ) ($U_1(I_1)$, $U_2(I_2)$ и $U_3(I_3)$) которых изображены на рис. 24а, соединены по схеме рис. 24б, где E = 100 В. Определить токи в ветвях.

Р е ш е н и е. Нелинейные резисторы 2 и 3 соединены параллельно, поэтому $U_2 = U_3 = U_{23}$. Заменим их одним эквивалентным резистором (рис. 24в), ВАХ $U_{23}(I_1)$ которого построим в соответствии с уравнением по первому закону Кирхгофа:

$$I_1(U_{23}) = I_2(U_{23}) + I_3(U_{23}).$$

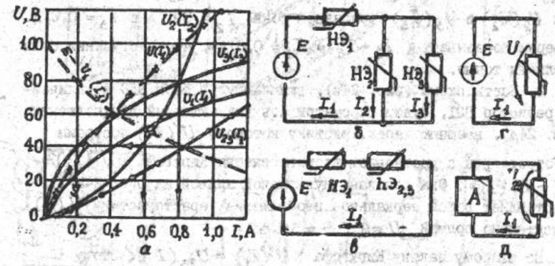


Рис. 24

Задаваясь произвольными значениями напряжения U_{23}, по характеристикам $U_2(I_2)$ и $U_3(I_3)$ определяем соответствующие значения тока I_2, I_3. Например, при U_{23} = 20 В I_3= 0,07 А, I_2 = 0,4 А. Следовательно, $I_1 = I_2 + I_3$ = 0,47 А. Получая таким образом ординаты U_{23} и абсциссы I_1 нескольких точек характеристики $U_{23}(I_1)$, откладываем их на график и соединяем точки плавной кривой, которая также показана на рис. 24а.

Далее возможны два варианта преобразований.

I. Пассивную часть цепи (рис. 24в) заменим одним эквивалентным сопротивлением (рис. 24г). Его ВАХ построим в соответствии с уравнением по второму закону Кирхгофа:

$$U(I_1) = U_1(I_1) + U_{23}(I_1).$$

Задаваясь рядом значений тока I_1, находим соответствующие значения напряжений U_1 и U_{23} по характеристикам $U_1(I_1)$ и $U_{23}(I_1)$, складывая которые, получаем значения напряжений U. Например, I_1 = 0,4 А; U_1 = 40 В; U_{23} = I5 В; $U = U_1 + U_{23}$ = 55 В. Зная абсциссы и ординаты нескольких точек характеристики $U(I_1)$, наносим эти точки на график и соединяем плавной кривой, которая также приведена на рис. 24а.

По условию задачи $U(I_1) = E$ = I00 В. Такую ординату имеет точка характеристики $U(I_1)$ с абсциссой I_1 = 0,8 А. Соответствующее этому значение U_{23} находим по кривой $U_{23}(I_1)$ (U_{23} = 40 В). Затем по известному значению U_{23} из характеристик $U_2(I_2)$ и $U_3(I_3)$ определяем токи I_2 = 0,6 А и I_3 = 0,2 А. Проверка показывает ($I_2 + I_3 = I_1$ = 0,8 А), что построения были выполнены точно.

2. Часть схемы (рис. 24в), включающую в себя ЭДС и нелинейный резистор НЭI, будем рассматривать как активный двухполюсник (рис. 24д), внешнюю характеристику которого $U'(I_1)$ построим в соответствии с уравнением второго закона Кирхгофа $U'(I_1) = E - U_1(I_1)$. Она показана пунктирной кривой на рис. 24а и представляет собой зеркальное изображение характеристики $U_1(I_1)$ относительно прямой $U = 0,5 \cdot E = 50$ В.

По второму закону Кирхгофа $U'(I_1) = U_{23}(I_1)$. Этому условию удовлетворяет ордината $U' = U_{23}$ = 40 В и абсцисса

I_1 = 0,8 А точки пересечения характеристик $U'(I_1)$ и $U_{23}(I_1)$. Остальные искомые величины определяются, как и в первом варианте, для найденного значения $U_{23} = U_2 = U_3$ 40 В по кривым $U_2(I_2)$ и $U_3(I_3)$: I_2 = 0,6 А, I_3 = 0,2 А.

Задача 4.2. Определить токи в ветвях цепи с двумя узлами (рис. 25б), если $E_1 = 2E_2$ = I00 В, а ВАХ нелинейных сопротивлений изображены на рис. 25а.

Р е ш е н и е. При указанных на схеме (см. рис. 25б) положительных направлениях токов и напряжений строим ВАХ ветвей в соответствии с уравнениями второго закона Кирхгофа:

$$U_{ab}(I_1) = E_1 - U_1(I_1);$$

$$U_{ab}(I_2) = U_2(I_2) - E_2;$$

$$U_{ab}(I_3) = U_3(I_3).$$

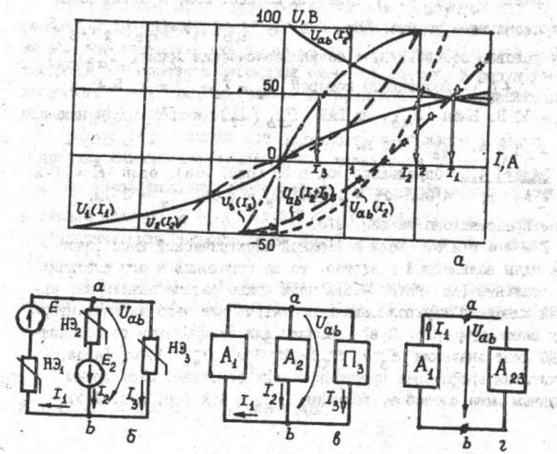


Рис. 25

Первая из кривых представляет собой зеркальное изображение кривой $U_1(I_1)$ относительно прямой $U(I)=0{,}5\cdot E_1=50$ В $=\mathrm{const}$; для построения второй кривой все точки на кривой $U_2(I_2)$ необходимо сместить параллельно оси напряжения на величину $-E_2=-50$ В; третья кривая совпадает с кривой $U_3(I_3)$. Все эти ВАХ приведены на рис. 25а. Они являются внешними характеристиками двухполюсников, изображенных на рис. 25в.

В схеме по первому закону Кирхгофа имеем

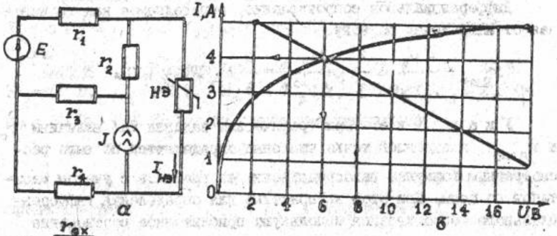
$$I_1(U_{ab})=I_2(U_{ab})+I_3(U_{ab}).$$

Согласно правой части уравнения, заменим второй и третий двухполюсники одним эквивалентным, точки ВАХ которого $U_{ab}(I_2+I_3)$ получим, суммируя значения I_2 и I_3, найденные из характеристик $U_{ab}(I_2)$ и $U_{ab}(I_3)$ при одинаковых значениях U_{ab}. Например, $U_{ab}=25$ В, $I_2=1{,}8$ А, $I_3=0{,}2$ А, $I_2+I_3=2$ А.

Кривая $U_{ab}(I_2+I_3)$ показана на рис. 25а, а схема после преобразования – на рис. 25г. Для нее $U_{ab}(I_1)=U_{ab}(I_2+I_3)$. Этому условию соответствует точка пересечения кривых $U_{ab}(I_1)$ и $U_{a}(I_2+I_3)$, координаты которой $I_1=I_2+I_3=2{,}5$ А и $U_{ab}=50$ В. Зная U_{ab}, по ВАХ $U_{ab}(I_2)$ и $U_{ab}(I_3)$ находим $I_2=2$ А, $I_3=0{,}5$ А.

Задача 4.3. Определить ток в НЭ (рис. 26а), если $E=30$ В $J=2$ А; $r_1=4$ Ом, $r_2=1$ Ом, $r_3=3$ Ом, $r_4=2$ Ом. ВАХ НЭ представлена на рис. 26б.

Р е ш е н и е. Если в сложной электрической цепи содержится один нелинейный резистор, то по отношению к его выводам всю остальную (линейную) часть цепи можно рассматривать как активный линейный двухполюсник и составить для него эквивалентную схему замещения (рис. 26в). Расчеты для эквивалентного источника ЭДС дают значения $E_э=U_{xx}=22$ В и $r_{вх}=4$ Ом. Далее, рассчитывая графически простейшую цепь (см. рис. 26в) любым описанным выше способом, получим $I_{нэ}=4$ А (см. рис. 26б).



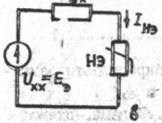


Рис. 26

У к а з а н и е. Аналогичная идея используется при расчете произвольной цепи с двумя нелинейными резисторами, когда вся электрическая схема, кроме двух выделенных ветвей с НЭ, сводится к Т-образной пассивной схеме замещения. В результате получается цепь с двумя узлами, которая может быть рассчитана ранее описанными методами.

Задача 4.4. Анодный ток двухэлектродной лампы связан с анодным напряжением приближенным выражением $I_a=kU_a^{3/2}$, где k – коэффициент, зависящий от конструкции лампы (пусть в данном примере $k=10^{-5}$ А·В$^{-3/2}$). Определить статическое и дифференциальное сопротивление диода при анодном напряжении $U_a=100$ В.

Р е ш е н и е. Статическое сопротивление, определяемое как отношение постоянного напряжения на НЭ к току в нем, будет

$$r_{ст}=\frac{U_a}{I_a}=\frac{U_a}{kU_a^{3/2}}=\frac{1}{kU_a^{1/2}},$$

и при $U_a=100$ В $\quad r_{ст}=10$ кОм.

Дифференциальное сопротивление, определяемое как производная от напряжения по току,

$$r_{диф} = \frac{dU_a}{dI_a} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{kU_a^{3/2}} = \frac{2}{3}\, r_{ст} = 6{,}7 \text{ кОм}.$$

У к а з а н и е. При графическом задании ВАХ величины $r_{ст}$ и $r_{диф}$ в заданной точке численно определяются по выше рассмотренным формулам непосредственно из графиков с учетом масштабов по осям. При этом на практике для определения дифференциального сопротивления используют приближенное соотношение

$$r_{диф} = \frac{dU}{dI} \approx \frac{\Delta U}{\Delta I},$$

применение которого связано с построением в окрестности заданной точки ВАХ треугольника со сторонами ΔU и ΔI.

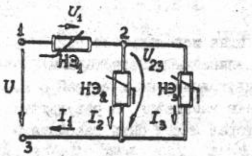


Рис. 27

Задача 4.5. К цепи, схема которой изображена на рис. 27, приложено напряжение U = 30 В. ВАХ нелинейных сопротивлений заданы уравнениями $I_1 = a\,U_1^2$;

$$I_2 = b\,U_{23}^2;$$

$$I_3 = c\,U_{23}^2,$$

где $a = 3 \cdot 10^{-3}$ А/В^2; $b = 5 \cdot 10^{-3}$ А/В^2; $c = 7 \cdot 10^{-3}$ А/В^2. Определить токи и напряжения в цепи.

Р е ш е н и е. По первому закону Кирхгофа $I_1 = I_2 + I_3$ или с учетом уравнений ВАХ сопротивлений

$$a\,U_1^2 = (b + c)\,U_{23}^2.$$

По второму закону Кирхгофа $U = U_1 + U_{23}$. Совместное решение уравнений дает

$$U_{23} = U\left(\sqrt{\frac{b+c}{a}} + 1\right)^{-1} \approx 10 \text{ В},$$

$$U_1 = U - U_{23} = 20 \text{ В}.$$

Токи определяются по уравнениям ВАХ

$$I_1 = a\,U_1^2 = 1{,}2 \text{ А}; \quad I_2 = b\,U_{23}^2 = 0{,}5 \text{ А}; \quad I_3 = c\,U_{23}^2 = 0{,}7 \text{ А}.$$

Задача 4.6. В схеме (рис. 28а) E_1 = 10 В, E_2 = 20 В, E_3 = 30 В, E_5 = 40 В, J_4 = 4 А, R_1 = 10 Ом, R_2 = 2,5 Ом, R_3 = 30 Ом. ВАХ НЭ задана следующими значениями:

U, В ...	0	2	3	4	5	6
I, А ...	0	0,1	0,3	0,6	0,9	1,2

Определить токи I, I_1, I_2, I_3 и напряжение $U_{НЭ}$.

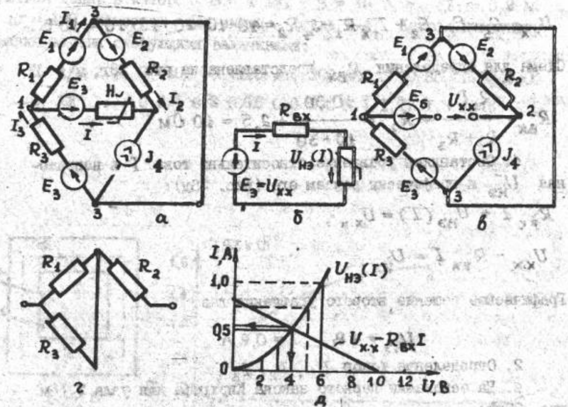


Рис. 28

Р е ш е н и е. В основу расчета положен метод эквивалентного источника напряжения.

1. Определение тока I и напряжения $U_{НЭ}$ по схеме (рис. 28б).

а. Размыкаем ветвь с НЭ и определяем напряжение $U_{х.х}$ на зажимах разомкнутой ветви (рис. 28в). На основании второго закона Кирхгофа для левого контура 3'-1-3-3' имеем:

$$I_{1x}(R_1+R_3)=E_1+E_3,$$

откуда

$$I_{1x}=\frac{E_1+E_3}{R_1+R_3}=\frac{10+30}{10+30}=1\,A.$$

Для верхнего контура I-3-2-I можем записать

$$I_{1x}R_1-J_4R_2-U_{x.x}=E_1+E_2-E_5,$$

откуда

$$U_{x.x}=E_5-E_1-E_2+I_{1x}R_1-J_4R_2=40-10-20+10-10=10\,В.$$

Схема для определения $R_{вх}$ представлена на рис. 28г.

$$R_{вх}=\frac{R_1 r_3}{R_1+R_3}+R_2=\frac{10\cdot 30}{10+30}+2,5=10\,Ом.$$

б. Составляем уравнение относительно тока I и напряжения $U_{нэ}$ и графически решаем его (рис. 28д):

$$R_{вх}I+U_{нэ}(I)=U_{x.x},$$

$$U_{x.x}-R_{вх}I=U_{нэ}.$$

Графическое решение второго уравнения дает

$$U_{нэ}=4\,В,\quad I=0,6\,A.$$

2. Определение токов I_1, I_2, I_3.

а. На основании первого закона Кирхгофа для узла 2 (см. рис. 28а):

$$I_2+I+J_4=0,$$

$$I_2=-I-J_4=-0,6-4=-4,6\,A.$$

б. На основании второго закона Кирхгофа для верхнего контура I-3-2-I:

$$I_1R_1+I_2R_2-U_{нэ}=E_1+E_2-E_5;\quad I_1=0,55\,A.$$

в. На основании первого закона Кирхгофа для узла I:

$$I_3=I+I_1=0,6+0,55=1,15\,A.$$

Проверка:

$$I_1=I_2+I_3+J_4,\quad 0,55=-4,6+1,15+4=0,55;$$

$$0,55\equiv 0,55.$$

5. МАГНИТНЫЕ ЦЕПИ ПРИ ПОСТОЯННОМ МАГНИТНОМ ПОТОКЕ

Задача 5.I. На рис. 29а представлена неразветвленная магнитная цепь, в которой B = I Тл, $S=10^{-4}\,м^2$, l = 0,2 м, w = 100. Материал сердечника - сталь Э-41. Кривая намагничивания задана следующими величинами:

Н, А/м ...	0	40	60	120	180	300	400	500	800	1600	2000
В, Тл ...	0	0,1	0,3	0,65	0,8	1,0	1,1	1,17	1,3	1,45	1,5

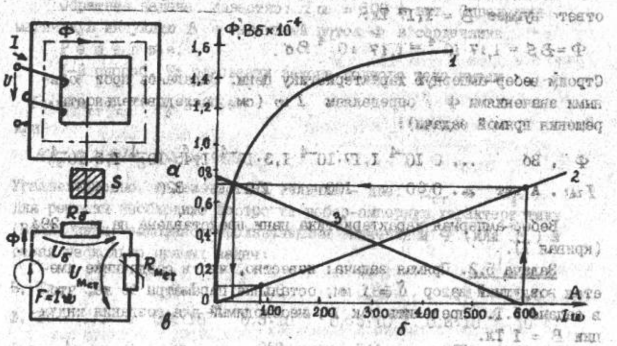


Рис. 29