Прямая задача: Определить ток I, необходимый для создания в сердечнике индукции $B = 1$ Тл.

Обратная задача: Известно $Iw = 100$ А вит. При тех же условиях определить поток Ф и индукцию В.

Р е ш е н и е. Для решения прямой задачи предполагается приведенная ниже последовательность $\Phi \to B \to H \to Iw \to I$:

1. По кривой намагничивания для $B = 1$ Тл находим $H = 300$ А/м.

2. В соответствии с законом полного тока имеем

$$Iw = H \cdot l = 300 \cdot 0{,}2 = 60 \text{ А·вит},$$

$$I = Iw / w = 60/100 = 0{,}6 \text{ А}$$

Для решения обратной задачи задано: $Iw = 100$ А·вит; определим поток Ф и индукцию B.

1. Находим напряженность магнитного поля, используя закон полного тока для неразветвленной магнитной цепи:

$$H = Iw / l = 100/0{,}2 = 500 \text{ А/м}.$$

2. Зная, что $H = 500$ А/м, по кривой намагничивания материала сердечника определяем $B = 1{,}17$ Тл.

3. Вычисляем значение магнитного потока в сердечнике, соответствующее $B = 1{,}17$ Тл:

$$\Phi = BS = 1{,}17 \cdot 10^{-4} = 1{,}17 \cdot 10^{-4} \text{ Вб}.$$

Строим вебер-амперную характеристику цепи. Задаваясь произвольными значениями Ф, определяем Iw (см. последовательность решения прямой задачи):

Ф, Вб ...	0	10^{-4}	$1{,}17 \cdot 10^{-4}$	$1{,}3 \cdot 10^{-4}$	$1{,}45 \cdot 10^{-4}$	$1{,}5 \cdot 10^{-4}$
Iw, А·вит ...	0	60	100	160	320	400

Вебер-амперная характеристика цепи представлена на рис. 29б (кривая 1).

Задача 5.2. Прямая задача: известно, что в сердечнике имеется воздушный зазор $\delta = 1$ мм; остальные параметры те же, что в задаче 5.1. Определить ток I, необходимый для создания индукции $B = 1$ Тл.

Р е ш е н и е.

1. Так как магнитная цепь неразветвленная, магнитный поток

в сердечнике и в зазоре одинаковы; следовательно, $B_{ст} = B_\delta = 1$ Тл.

2. Зная, что $B_{ст} = 1$ Тл, по кривой намагничивания определяем $H_{ст} = 300$ А/м. Находим напряженность поля в воздушном зазоре:

$$H_\delta = B_\delta / \mu_0 = 0{,}8 \cdot 10^6 B_\delta = 0{,}8 \cdot 10^6 \cdot 1 = 0{,}8 \cdot 10^6 \text{ А/м},$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м = const.

3. По закону полного тока имеем

$$Iw = H_{ст} l_{ст} + H_\delta \delta = 300 \cdot 0{,}2 + 0{,}8 \cdot 10^6 \cdot 10^{-3} = 860 \text{ А}$$

(полагаем, что $l_{ст} >> \delta$ и поэтому значением δ можно пренебречь).

4. Определяем ток, необходимый для создания индукции $B = 1$ Тл:

$$I = Iw / w = 8{,}6 \text{ А}$$

П р и м е ч а н и е. При наличии воздушного зазора для получения того же значения индукции $B = 1$ Тл требуется в 8,6/0,6 = 14 раз больший ток.

Обратная задача. Известно: $Iw = 600$ А·вит. Определить магнитную индукцию B и магнитный поток Ф в сердечнике.

Р е ш е н и е.

1-й способ. На основании закона полного тока имеем

$$Iw = H_{ст} l_{ст} + H_\delta \cdot \delta = 600$$

или

$$H_{ст} \cdot 0{,}2 + H_\delta \cdot 10^{-3} = 600.$$

Уравнение одно, а неизвестных величин – две: $H_{ст}$ и H_δ. Для решения необходимо построить вебер-амперную характеристику (ВбАХ) цепи, задаваясь произвольными значениями Ф (или B) и решая несколько прямых задач:

В, Тл ...	0	0,1	0,3	0,65	0,8	1,0
Ф, Вб ...	0	$0{,}1 \cdot 10^{-4}$	$0{,}3 \cdot 10^{-4}$	$0{,}65 \cdot 10^{-4}$	$0{,}8 \cdot 10^{-4}$	10^{-4}
Iw, А ...	0	88	252	544	676	860

Строим ВбАХ (кривая 2 на рис. 29б). По известному значению $I w = 600$ и по кривой 2 определяем поток $\Phi = 0{,}72 \cdot 10^{-4}$ Вб и индукцию

$$B = \frac{\Phi}{S} = \frac{0{,}72 \cdot 10^{-4}}{10^{-4}} = 0{,}72 \text{ Тл}.$$

2-й способ. Обратную задачу можно решить методом обращенных характеристик. Построим схему замещения магнитной цепи (рис. 29в).

На основании второго закона Кирхгофа для магнитной цепи имеем:

$$I w = U_\delta + U_{M\,ст}, \text{ откуда } U_{M\,ст} = I w - U_\delta \quad (*)$$

$$U_{M\,ст} = I w - \Phi R_\delta, \quad R_\delta = \frac{\delta}{\mu_0 S} = \frac{10^{-3}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^{-4}} \approx 8 \cdot 10^6 \frac{1}{\text{Гн}}.$$

Правая часть уравнения (*) – это линейная графически обращенная вебер-амперная характеристика воздушного зазора (характеристика 3 на рис. 29б).

$$I w = 600 \text{ А}, \quad H_\delta = \frac{I w}{\delta} = \frac{600}{10^{-3}} = 6 \cdot 10^5 \frac{\text{А}}{\text{м}},$$

$$B_\delta = H_\delta \mu_0 = 6 \cdot 10^5 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \approx 0{,}75 \text{ Тл}.$$

Уравнение прямой 3 на рис. 29б:

$U_{M\,ст} = 600 - \Phi \cdot 8 \cdot 10^6$.

Прямая 3 строится по двум точкам:

$\Phi = 0$, $U_{M\,ст} = 600$ А

и

$$U_{M\,ст} = 0 \quad \Phi = \frac{600}{8 \cdot 10^6} = 7 \cdot 10^{-6} = 0{,}75 \cdot 10^{-4} \text{ Вб}.$$

Точка пересечения характеристик I и 3 на рис. 29б позволяет определить $\Phi = 0{,}72 \cdot 10^{-4}$ Вб ($B = 0{,}72$ Тл) и $U_{M\,ст} \approx 20$ А.

В случае разветвленной магнитной цепи порядок расчета следующий:

I) магнитная цепь разбивается на участки с одинаковым сечением, выполненные из однородного материала;

2) определяются геометрические размеры этих участков – средняя длина l и сечение S;

3) составляется схема замещения магнитной цепи (см. рис. 29в), аналогичная электрической цепи с нелинейными элементами; каждый участок цепи представляется магнитным сопротивлением, а каждая обмотка с током – намагничивающей силой, направление которой в общем случае определяется по правилу правоходового винта; в ветвях такой схемы протекают магнитные потоки, а на элементах существуют магнитные напряжения;

4) для каждой ветви составляется уравнение, связывающее магнитное напряжение на ее зажимах с магнитным потоком;

5) в соответствии с этими уравнениями строятся ВбАХ ветвей (вспомогательные вычисления сводятся в таблицы);

6) если известна схема замещения магнитной цепи и ВбАХ ветвей, то дальнейший расчет аналогичен расчету соответствующей нелинейной электрической цепи и проводится графоаналитическим (см., например, задачу 4.2) или численным методом.

6. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

Задача 6.I. Построить кривые изменения во времени потокосцепления Ψ, тока i, напряжения на нелинейной индуктивности u_L. Схема цепи представлена на рис. 30а, вебер-амперная характеристика $\Psi(i)$ – на рис. 30в, график зависимости $e(t)$ – на рис. 30б, причем $E_m = 100$ В, $T = 9 \cdot 10^{-4}$ с, $r = 1000$ Ом, $\Psi_m = 0{,}015$ Вб.

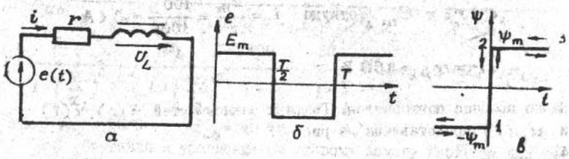

Рис. 30

Р е ш е н и е. Используем метод кусочно-линейной аппроксимации.

Принимаем в качестве начального режима цепи $t = 0$, $\Psi = -\Psi_m = -0{,}015$ Вб. Соотношения параметров цепи определяются уравнением, составленным по второму закону Кирхгофа:

$$e = u_r + u_L = ir + \frac{d\Psi}{dt}.$$

Решаем это уравнение для отдельных участков вебер-амперной характеристики.

а. При движении точки I...2 на ВбАХ на рис. 30в:

$$0 \le t \le t_1, \quad i = 0, \quad e = \frac{d\Psi}{dt};$$

интегрируем последнее выражение, получаем $\Psi = E_m t + C$, где C – постоянная интегрирования, определяемая из начальных условий: при $t = 0$ $\Psi = -\Psi_m$; следовательно,

$$C = -\Psi_m \quad \text{и} \quad \Psi = E_m t - \Psi_m.$$

От точки I до точки 2 характеристики сердечник перемагничивается. По времени это происходит от $t = 0$ до $t = t_1$, где t_1 – момент достижения потокосцеплением значения Ψ_m. При $t = t_1$ имеем:

$$\Psi_m = E_m t_1 - \Psi_m; \; 2\Psi_m = E_m t_1, \text{откуда}$$

$$t_1 = \frac{2\Psi_m}{E_m} = \frac{2 \cdot 0{,}015}{100} = 3 \cdot 10^{-4}\ \text{с} = \frac{T}{3}.$$

б. При движении точки 2...3 на ВбАХ на рис. 30в:

$$t_1 \le t \le \frac{T}{2}, \quad \Psi = \Psi_m, \quad u_L = \frac{d\Psi}{dt} = 0;$$

$$e = ri = E_m, \text{ откуда } \quad i = \frac{E_m}{r} = \frac{100}{1000} = 0{,}1\ \text{А}.$$

$$ir = u_r = 100\ \text{В}.$$

Далее процесс повторяется. Графики зависимостей $\Psi(t)$, $i(t)$ и $u_L(t)$ представлены на рис. 3I.

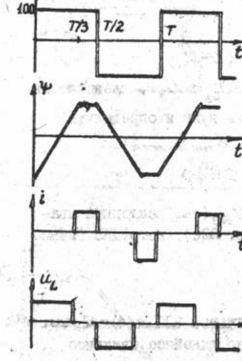

Рис. 3I

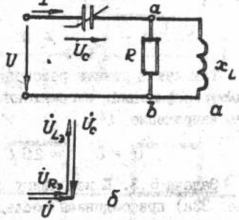

Рис. 32

Задача 6.2. Цепь (рис. 32а), которая питается от источника синусоидального тока, находится в режиме резонанса. Определить ток I, напряжение U, если ВАХ НЭ

$$U_c = 20I/(1{,}5 - I)\ (U_c\ [\text{В}],\ I\ [\text{А}]),\quad x_L = 50\ \text{Ом}$$

(по первой гармонике), $R = 100$ Ом.

Р е ш е н и е. В основу расчета положен комплексный метод анализа нелинейных цепей по первой гармонике.

I. Определяем сопротивление Z_{ab} параллельного участка в комплексной форме:

$$Z_{ab} = \frac{R \cdot jx_L}{R + jx_L} = \frac{R \cdot jx_L(R - jx_L)}{(R + jx_L)(R - jx_L)} = \frac{R \cdot x_L^2}{R^2 + x_L^2} + j\frac{R^2 x_L}{R^2 + x_L^2} =$$

$$= \frac{R}{1 + \left(\frac{R}{x_L}\right)^2} + j\frac{x_L}{1 + \left(\frac{x_L}{R}\right)^2} = \frac{100}{1+4} + j\frac{50}{1 + \frac{1}{4}} = 20 + j40 = R_э + jx_{Lэ},$$

где $R_э = 20$ Ом, $x_{Lэ} = 40$ Ом.

2. Составляем уравнение по второму закону Кирхгофа для последовательного контура:

$$\dot U = \dot U_{R_э} + \dot U_{L_э} + \dot U_C = U_{R_э} + j(U_{L_э} - U_C) = 20I + j40 \cdot I -$$

$$-j\,\frac{20I}{1{,}5-I}\;; \quad \dot U = 20I + j20I\left(2 - \frac{1}{1{,}5-I}\right).$$

3. В режиме резонанса напряжений $U_{L_э} = U_C$, следовательно, выражение в скобке можно приравнять нулю и определить ток I:

$$2 - \frac{1}{1{,}5-I} = 0\,, \text{ откуда } I = 1\,\text{А}.$$

Так как в режиме резонанса $U = U_{R_э}$ (см. векторную диаграмму напряжений, изображенную на рис. 32б), нетрудно вычислить напряжение U:

$$U = U_{R_э} = 20I = 20\ \text{В}.$$

Задача 6.3. К источнику синусоидальной ЭДС $e(t) = E_m \sin \omega t$ (рис. 33а) присоединены последовательно линейное активное сопротивление $r = 2500$ Ом и нелинейная емкость, кулон-вольтная характеристика которой изображена на рис. 33б. Амплитуда ЭДС $E_m = 50$ В, угловая частота $\omega = 500\ \text{c}^{-1}$, заряд $q_m = 10^{-5}$ Кл. Построить зависимости заряда q, тока i и напряжения на емкости u_C в функции ωt при установившемся режиме.

Решение. Согласно характеристике конденсатора ток через него может течь и изменять заряд только при бесконечно малом напряжении между обкладками ($u_C = 0$). При этом емкость бесконечна, что равносильно короткому замыканию конденсатора. Если $u_C \neq 0$, то заряд $q = \pm q_m$ не изменяется, ток через конденсатор не течет, дифференциальная емкость равна нулю, что равносильно обрыву цепи.

По второму закону Кирхгофа

$$ri + u_C = r\frac{dq}{dt} + u_C = E_m \sin \omega t.$$

При установившемся периодическом режиме перезарядка конденсатора от $-q_m$ до q_m начинается в момент перехода ЭДС через нуль.

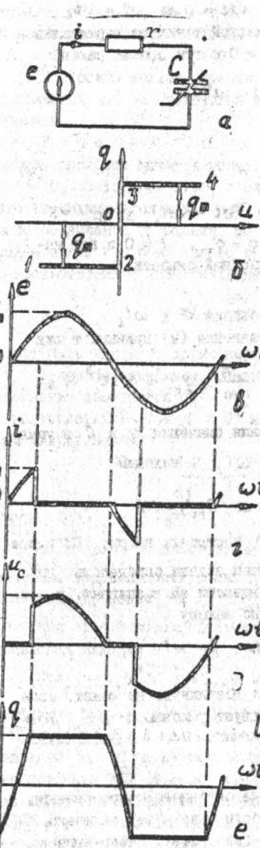

Рис. 33

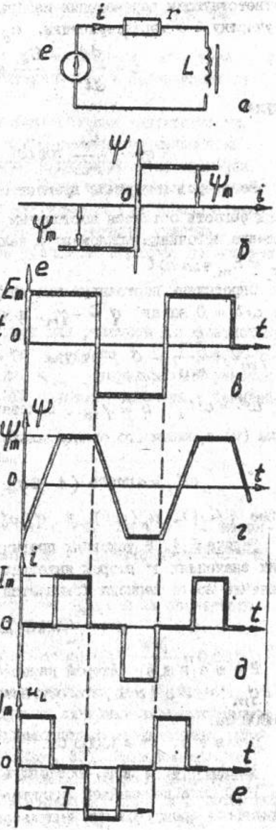

Рис. 34

В первом интервале времени от $\omega t = 0$ до $\omega t = \omega t_1$, соответствующем перемещению изображающей точки по вертикальному участку 2-3 характеристики, $u_c = 0$ и ток в цепи равен

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{E_m}{r}\sin\omega t,$$

откуда

$$q = -\frac{E_m}{r\omega}\cos\omega t + C. \qquad (*)$$

Во втором интервале времени от $\omega t = \omega t_1$ до $\omega t = \pi$ заряд емкости остается постоянным $q = q_m$, $i = 0$ и все напряжение источника приложено к нелинейной емкости $u_c = E_m \sin\omega t$.

Определяем постоянную интегрирования C и ωt_1.
При $\omega t = 0$ заряд $q = -q_m$, и уравнение (*) принимает вид

$$-q_m = -\frac{E_m}{r\omega} + C, \text{ откуда } C = \frac{E_m}{r\omega} - q_m = 3\cdot10^{-5} \text{ Кл}.$$

При $\omega t = \omega t_1$ $q = q_m$. Подставляя значения q и C в уравнение (*) и решая его относительно ωt_1, находим

$$\omega t_1 = \arccos\,(1 - 2q_m r\omega / E_m) = 60^\circ.$$

Кривые $i(\omega t)$, $u_c(\omega t)$ и $q(\omega t)$ построены на рис. 33 г,д,е.

Задача 6.4. В условиях предыдущей задачи определить, при каких значениях r второй интервал времени не возникает, и ток в течение всего периода изменяется по закону

$$i = \frac{E_m}{r}\sin\omega t.$$

Решение. Второй интервал возникнуть не может, если $|1 - 2q_m r\omega / E_m| \geq 1$, что соответствует условию $r \geq E_m/\omega q_m = 10000$ Ом.

Ответ: $r \geq 10000$ Ом.

Задача 6.5. В цепь, состоящую из активного сопротивления $r = 1000$ Ом и нелинейной индуктивности (рис. 34а), включена ЭДС, имеющая вид прямоугольных импульсов (рис. 34в). Вебер-амперная

характеристика нелинейной индуктивности показана на рис. 34б. Максимальное потокосцепление $\Psi_m = 0{,}5$ Вб, амплитуда ЭДС $E_m = 200$ В, период $T = 0{,}02$ с.

Построить кривые изменения потокосцепления Ψ, тока i и напряжения u_L на нелинейной индуктивности в зависимости от времени.

Решение. Согласно характеристике индуктивности, потокосцепление может изменяться при бесконечно малом токе ($i = 0$). В течение этого процесса индуктивность бесконечна, что воспринимается как обрыв цепи. Если потокосцепление равно потокосцеплению насыщения, то индуктивность (дифференциальная) равна нулю, что равносильно короткому замыканию участка.
В соответствии с этим нелинейное уравнение Кирхгофа по контуру

$$ri + \frac{d\Psi}{dt} = e$$

может быть заменено двумя линейными для участков характеристики.

В первом интервале времени от $t = 0$ до $t = t_1$ потокосцепление изменяется от $-\Psi_m$ до Ψ_m (вертикальный участок характеристики), ток $i = 0$, и ЭДС целиком приложена к нелинейной индуктивности

$$\frac{d\Psi}{dt} = e = E_m,$$

откуда $\Psi = E_m t + C$.

Во втором интервале времени от $t = t_1$ до $t = T/2$ напряжение на индуктивности равно нулю ($\Psi = \Psi_m = \text{const}$, $d\Psi/dt = 0$), а по цепи проходит ток $i = E_m/r$.

При $t = 0$ потокосцепление $\Psi = -\Psi_m$, и из последнего уравнения находим $C = -\Psi_m = -0{,}5$ Вб.

При $t = t_1$ $\Psi = \Psi_m$, а следовательно, $t_1 = \dfrac{2\Psi_m}{E_m} = 0{,}005$ с.

Графики $i(t)$, $u_L(t)$ и $\Psi(t)$ изображены на рис. 34г,д,е.

Задача 6.6. В цепь, состоящую из линейных активных сопротивлений r_1, r_2 и катушки с ферромагнитным сердечником, включен источник ЭДС $e = E_m \sin\omega t$ (рис. 35). Зависимость $B(H)$ для материала сердечника катушки показана на рис. 36а, где $Y_m = B_m = 1$ Тл. Площадь сечения сердечника $S = 10^{-4}$ м^2, число витков $w = 100$, $E_m = 230$ В, $r_1 = r_2 = 1000$ Ом, $\omega = 5000$ с$^{-1}$.

Построить графики потокосцепления и каждого из токов цепи в функции ωt.

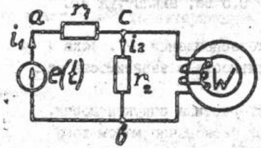

Рис. 35

Задача 6.7. В схеме предыдущего примера (см. рис. 35) источник ЭДС заменен источником тока $i = I_m \sin \omega t$.

Катушка с ферромагнитным сердечником та же, а остальные данные следующие: r_1 = 50 Ом, r_2 = 100 Ом, I_m = 0,5 А, ω = 1000 c^{-1}.

Построить графики тока i_3 и напряжения u_{cb} в функции ωt.

Примечание. Решение задач 6.6 и 6.7 аналогично решению задач 6.3...6.5.

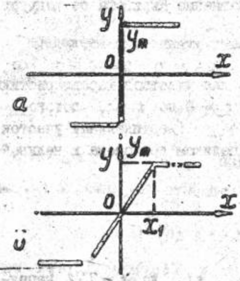

Рис. 36

Задача 6.8. Цепь, состоящая из линейного активного сопротивления и нелинейной индуктивности, питается от источника синусоидального тока $i(t) = I_m \sin \omega t$. Схема цепи и характеристика индуктивности изображены на рис. 37а,б.

Дано: I_m = 10 А, ω = 314 c^{-1}, r = 10 Ом, Ψ = 0,07 Вб, I_1 = 7 А.

Построить графики потокосцепления Ψ, напряжений на активном сопротивлении u_r, на нелинейной индуктивности u_L и на входе цепи u_{ab} в функции ωt.

Решение. В интервалах времени, соответствующих изменению тока от $-I_1$ до $+I_1$ (ненасыщенные участки характеристики), цепь является линейной с постоянной дифференциальной индуктивностью

$$L_д = \frac{d\Psi}{di} = \frac{\Psi_m}{I_1} = \frac{0,07}{7} = 0,01 \text{ Гн}.$$

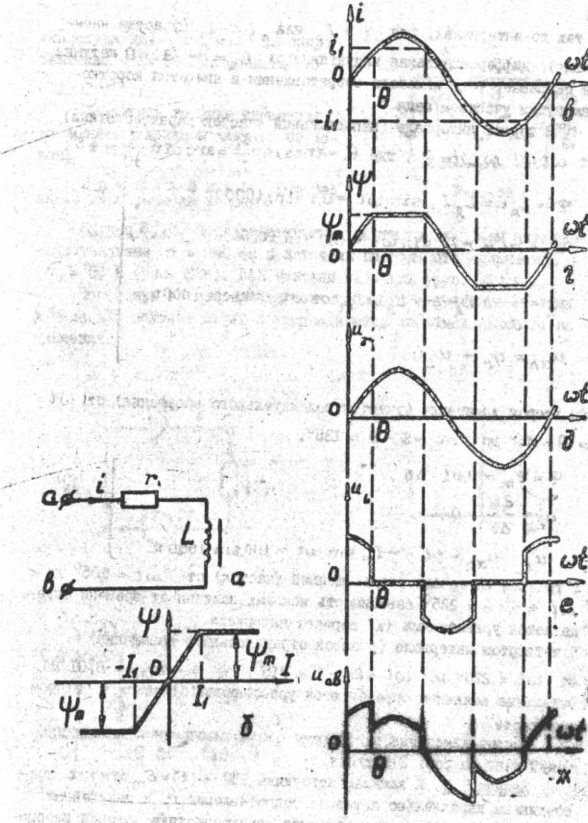

Рис. 37

В тех же интервалах, где $i > I_1$ или $i < -I_1$ (участки насыщения), дифференциальная индуктивность $L_д = d\Psi/di = 0$, катушка не оказывает току никакого сопротивления и является короткозамкнутым участком цепи.

В первом интервале (ненасыщенный участок характеристики) от $\omega t = 0$ до $\omega t = \theta$, где $\theta = \arcsin\frac{I_1}{I_m} = \arcsin\frac{7}{10} = 45^\circ$,

$$\left.\begin{aligned} &\Psi = L_д i = L_д I_m \sin\omega t = 0{,}1 \sin 1000t \\ &u_r = ri = rI_m \sin\omega t = 100 \sin 1000t \\ &u_L = \frac{d\Psi}{dt} = L_д\frac{di}{dt} = L_д\,\omega I_m \cos\omega t = 100\cos 1000t, \\ &u_{ab} = u_r + u_L . \end{aligned}\right\} \quad а$$

Во втором интервале (участок положительного насыщения) от $\omega t = \theta = 45^\circ$ до $\omega t = \pi - \theta = 135^\circ$.

$$\left.\begin{aligned} &\Psi = \Psi_m = 0{,}01 \text{ Вб}, \\ &u_L = \frac{d\Psi}{dt} = 0 . \\ &u_r = u_{ab} = ri = rI_m \sin\omega t = 100 \sin 1000t . \end{aligned}\right\} \quad б$$

В третьем интервале (ненасыщенный участок) от $\omega t = 135^\circ$ до $\omega t = \pi + \theta = 225^\circ$ зависимость искомых величин от времени определяется уравнениями (а) первого интервала.

В четвертом интервале (участок отрицательного насыщения) от $\omega t = 225^\circ$ до $\omega t = 2\pi - \theta = 315^\circ$, $\Psi = -\Psi_m = -0{,}01$ Вб. Остальные величины определяются уравнениями (б) как и во втором интервале.

Кривые изменения во времени потокосцепления и всех напряжений даны на рис. 37г,д,е,ж.

Задача 6.9. К зажимам источника ЭДС $e(t) = E_m \sin\omega t$ присоединены параллельно активное сопротивление r и нелинейная емкость (рис. 38), кулон-вольтная характеристика которой изображена на рис. 36б, причем $y_m = q_m = 10^{-4}$ Кл, $x_1 = U_1 = 5$ В.

Амплитуда ЭДС $E_m = 10$ В, сопротивление $r = 50$ Ом, частота $\omega = 1000\ с^{-1}$.

Построить графики изменения во времени заряда и каждого из токов.

П р и м е ч а н и е. Решение аналогично решению задачи 6.8.

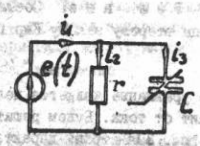

Рис. 38

Задача 6.10. Последовательно с вентилем включены активное сопротивление $r = 200$ Ом и источник постоянного напряжения $E_1 = 50$ В (рис. 39а). ВАХ вентиля идеальна (рис. 39б).

Построить кривую зависимости входного напряжения от тока в цепи для положительных и отрицательных значений входного напряжения.

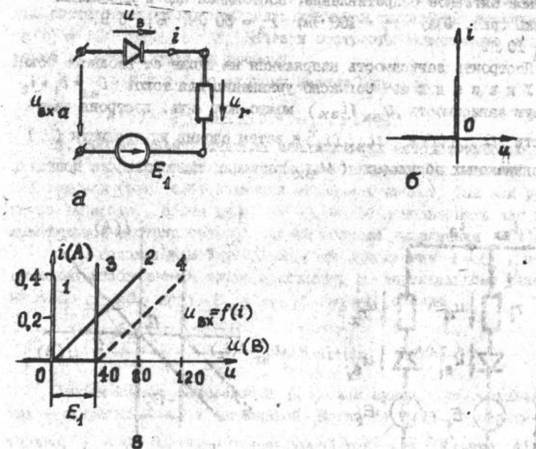

Рис. 39

Р е ш е н и е. Составим уравнения для расчета тока в цепи по второму закону Кирхгофа:

$$u_{вх} = u_в + ir + E_1.$$

Это уравнение является нелинейным, так как $u_в$ нелинейно зависит от тока. Будем решать это уравнение графически, для чего на рис. 39в строим характеристики: I - выпрямителя $u_в(i)$; 2 - линейного сопротивления $u_r = ri$ (по двум точкам при $i = 0$ $u_r = 0$; при $i = 0{,}2$ А $u_r = 40$ В); 3 - постоянной ЭДС E_1. Суммарная характеристика $u_{вх} = f(i)$ показана на рис. 39в (кривая 4). Она представляет собой сумму всех трех характеристик при любом определенном значении тока, так как все элементы соединены последовательно.

Задача 6.II. В каждую из двух параллельных ветвей включены линейное активное сопротивление, постоянная ЭДС и идеальный вентиль (рис. 40а) $r_1 = 100$ Ом, $r_2 = 50$ Ом, $E_1 = 5$ В, $E_2 = 10$ В.

Построить зависимость напряжения на входе от входного тока.

У к а з а н и я. Согласно уравнению для токов $i_{вх} = i_1 + i_2$ искомую зависимость $u_{вх}(i_{вх})$ можно получить, построив зависимости $u_{вх}(i_1)$ и $u_{вх}(i_2)$ и затем сложив их ординаты (i) при одинаковых абсциссах ($u_{вх}$).

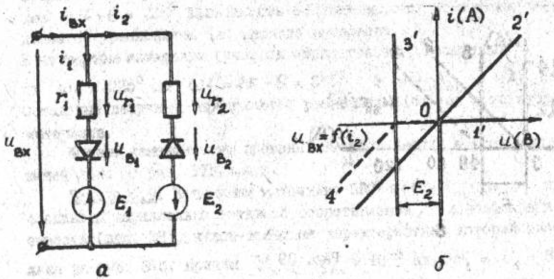

Рис. 40

Первая ветвь с током i_1 полностью аналогична схеме предыдущей задачи, поэтому кривая $u_{вх}(i_1)$ строится аналогично и имеет вид кривой 4 на рис. 39в. Характеристика второй ветви (кривая 4' на рис. 40б) строится согласно уравнению

$$u_{вх} = u_{в_2} = r_2 i_2 - E_2$$

путем суммирования характеристик элементов ветви с учетом того, что выпрямитель 2 включен в непроводящем направлении: при $u_{в2} > 0$ $i_2 = 0$, при $u_{в2} = 0$ $i_2 < 0$. Для непроводящего направления характеристика выпрямителя 2 изображена на рис. 40б лучом I'.

Задача 6.I2. Однополупериодный выпрямитель при зарядке аккумулятора работает на активное сопротивление $r = 400$ Ом и встречную постоянную ЭДС $E = 20$ В. ВАХ вентиля идеальна (рис. 41а,б).

Построить кривую тока $i = f(t)$ в цепи, вычислить постоянную составляющую тока при синусоидальном напряжении источника $e(t) = 100 \sin\omega t$ В. Найти и построить зависимость напряжения на выпрямителе от времени.

Р е ш е н и е. По второму закону Кирхгофа

$$e(t) = E_m \sin\omega t = u_в + ri + E.$$

I. Решаем задачу сначала аналитически методом кусочно-линейной аппроксимации характеристики нелинейного элемента. ВАХ вентиля (рис. 41б) заменена отрезками прямых. Так как уравнение записано в общем виде, то его можно использовать для положительной и отрицательной частей периода напряжения $e(t) - E$.

а. В положительной части периода напряжения $i \neq 0$, и движение изображаемой точки происходит по вертикальному участку ВАХ, $u_в = 0$, $e(t) = E_m \sin\omega t = ri + E$, отсюда

$$i = \frac{E_m \sin\omega t - E}{r} = (0{,}25 \sin\omega t - 0{,}05)\ \text{А}.$$

Строим кривую зависимости $i(t)$ как сумму двух составляющих - синусоидальной и постоянной. Когда же $e(t) - E$ отрицательно, $i = 0$. Получаем пульсирующий ток $i = f(t)$ (рис. 41в).

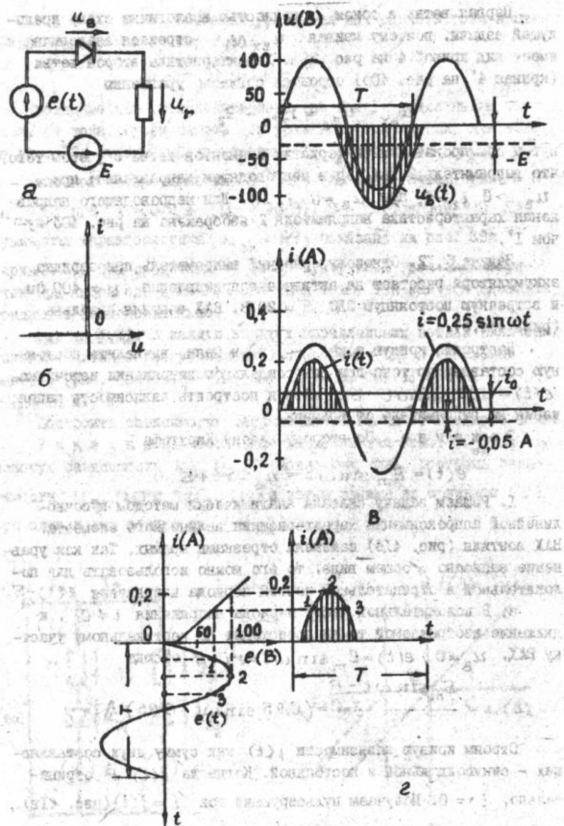

Рис. 4I

б. Находим постоянную составляющую тока

$$I_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} i(\omega t)\,d\omega t=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(0{,}25\sin\omega t-0{,}05)\,d\omega t=$$

$$=\frac{1}{2\pi}0{,}25\cos\omega t\Big|_0^{\pi}-\frac{0{,}05}{2}=\frac{2}{2\pi}\cdot 0{,}25-0{,}025=0{,}054.$$

в. Напряжение на выпрямителе находим из уравнения

$$u_в=E_m\sin\omega t-E-r\cdot i\,,$$

учитывая, что в проводящую часть периода $i>0$, $u_в=0$. Для непроводящей части периода

$$i=0,\quad u_в=E_m\sin\omega t-E=100\sin\omega t-20 \text{ В}.$$

Напряжение $u_в$ находим суммированием синусоиды и постоянной составляющей. В начале и конце непроводящей части периода $E_m\sin mt=E=20$ В, $u_в=0$, $i=0$. Когда $e(t)>20$ В, то $i>0$, $u_в=0$. Результаты расчета изображены на рис. 4Iв.

2. Задачу можно решить графически (рис. 4Iг). Для этого графически находим зависимость

$$e(i)=u_в+ri+E$$

как сумму характеристик выпрямителя, сопротивления и постоянной ЭДС так же, как в задаче 6.I0. Рядом с зависимостью $e(i)$ строим зависимость $e(t)=100\sin\omega t$. Когда $e(t)=20$ В, выпрямитель начинает проводить ток; далее значения тока находим графически, используя $e(i)$. Получаем кривую тока (рис. 4Iг), аналогичную полученной методом кусочно-линейной аппроксимации.

Задача 6.I3. В схеме имеется источник постоянного напряжения $E_0=7$ В, два источника синусоидального напряжения $e_1=10\sin\omega t$, $e_2=15\sin\omega t$ и два идеальных вентиля, которые работают на активную нагрузку $r_1=70$ Ом и $r_2=100$ Ом (рис. 42). Найти и построить кривые зависимости тока $i_3(t)$ и напряжения на выпрямителе $u_{в2}(t)$.

Указания. Необходимо составить уравнения по законам Кирхгофа:

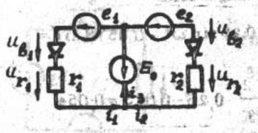

Рис. 42

$$e_1(t) - E_0 = u_{в1} + r_1 i_1;$$

$$e_2(t) + E_0 = -u_{в2} - r_2 i_2;$$

$$i_3 = i_1 + i_2.$$

Р е ш е н и е этой системы уравнений следует произвести методом кусочно-линейной аппроксимации характеристик выпрямителей аналогично рассмотренному в задаче 6.12. Сначала найти и построить кривые токов i_1 и i_2 для проводящих и непроводящих частей периода $e_1(t)$ и $e_2(t)$, поскольку они взаимно независимы. Ток i_3 найти графически по первому закону Кирхгофа. Напряжение $u_{в2}$ находится так же, как в задаче 6.12.

Рис. 43

Задача 6.14. Однополупериодный выпрямитель работает на нагрузку r = 200 Ом, L = 1,27 Гн. Напряжение сети $e(t) = 282 \sin 314t$ (рис. 43а). Найти и построить изменение тока нагрузки во времени.

Р е ш е н и е. Так как вентиль включает нагрузку в каждый положительный полупериод выпрямленного тока, то каждому включению вентиля соответствует переходный процесс.

Величину тока можно найти из уравнения

$$u_в + u_r + u_L = u_в + ri + L\frac{di}{dt} = E_m \sin \omega t. \qquad (1)$$

Для реальной цепи в активном сопротивлении r объединены сопротивления нагрузки и обмотки трансформатора, создающего $e(t)$. При идеальной ВАХ вентиля нелинейное уравнение (1) заменяется двумя линейными:

когда $i = 0$, то $u_в = e(t)$;

$$\text{при } i > 0 \quad u_в = 0 \quad \text{и} \quad ri + L\frac{di}{dt} = E_m \sin \omega t, \qquad (2)$$

Обратный ток ($i < 0$) через выпрямитель не проходит.

Решим уравнение (2) классическим методом. Представим ток в виде суммы принужденной и свободной составляющих:

$$i = i_{пр} + i_{св} = i_{пр} + A e^{pt}. \qquad (3)$$

Комплексная амплитуда принужденного тока

$$\dot I_{m\,пр} = \frac{\dot E_m}{r + j\omega L} = \frac{E_m}{z} e^{-j\varphi} = 0{,}63\, e^{-j63^\circ 30'}.$$

Мгновенное значение принужденного тока

$$i_{пр}(t) = \frac{E_m}{z} \sin(\omega t - \varphi) = 0{,}63 \sin(314t - 63^\circ 30').$$

Постоянная A находится из начальных условий. При $t = 0$ $e = 0$, $i(0) = i_L(0) = 0$. Подставляя последнее значение в уравнение (3), находим

$$A = i(0) - i_{пр}(0) = \frac{E}{z} \sin \varphi = 0{,}63 \sin 63^\circ 30' = 0{,}56.$$

Корень характеристического уравнения

$$p = -r/L = -157 \ 1/c.$$

Постоянная времени $\tau = L/r$ = 0,0064 с. Период синусоидального колебания $T = 2\pi/\omega$ = 0,02 с. Соотношение между T и τ: $\frac{T}{\tau}$ = 3,14. Окончательно имеем

$$i(t) = \frac{E_m}{z}[\sin(\omega t - \varphi) + \sin\varphi\, e^{pt}] = 0{,}63 \sin(314t - 63^\circ 30') + 0{,}56\, e^{-157t} \ \text{А при } i \geq 0$$

График тока представлен на рис. 43г.

7. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В НЕЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ

Задача 7.1. Дано: (рис. 44а) $U = 200$ В, $r_1 = r_2 = 1$ кОм, $r_3 = 6$ кОм, ВАХ НЭ $u_c = \alpha q^2$, где $\alpha = 10^4$ В/А^{2}с^2. Определить напряжение $u_c(t)$ после коммутации.

Р е ш е н и е. В основу расчета положен метод интегрируемой аппроксимации.

1. Определим $u_c(0)$, $q(0)$:

$$u_c(0_+) = u_c(0_-) = \frac{U\cdot r_1}{r_1+r_2+r_3} = \frac{200\cdot 1}{1+1+6} = 25 \text{ В}.$$

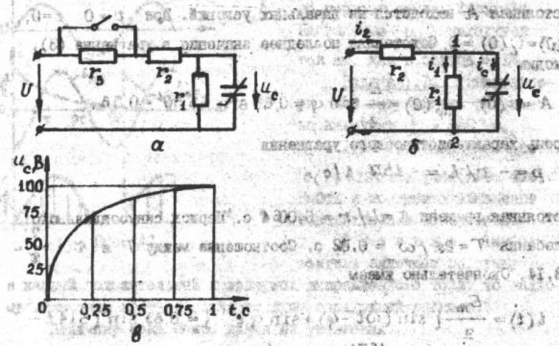

Рис. 44

2. Вычислим

$$q(0_+) = \sqrt{\frac{u_c(0_+)}{\alpha}} = \sqrt{\frac{25}{10^4}} = 0{,}05 \text{ Кл}.$$

$$q(\infty) = \sqrt{\frac{u_c(\infty)}{\alpha}} = \sqrt{\frac{100}{10^4}} = 0{,}1 \text{ Кл};$$

$$q^2(\infty) = \frac{U\cdot r_1}{(r_1+r_2)\alpha} = 0{,}01.$$

3. Составим дифференциальное уравнение состояния цепи. Рассмотрим схему после коммутации (рис. 44б):

а. По первому закону Кирхгофа для узла 1 имеем

$$i_2 = i_1 + i_c,$$

$$i_1 = \frac{u_c}{r_1}; \quad i_c = \frac{dq}{dt}; \quad i_2 = \frac{u_c}{r_1} + \frac{dq}{dt}.$$

б. По второму закону Кирхгофа для внешнего контура можно записать

$$r_2 i_2 + u_c = U;$$

$$\frac{r_2}{r_1} u_c + r_2 \frac{dq}{dt} + u_c = U;$$

$$\left(\frac{r_2}{r_1} + 1\right) u_c + r_2 \frac{dq}{dt} = U;$$

$$\frac{dq}{dt} = \alpha \frac{r_1+r_2}{r_1 r_2}\left(\frac{r_1}{\alpha}\cdot\frac{U}{r_1+r_2} - q^2\right).$$

Введем обозначения:

$$A^2 = \frac{r_1}{\alpha}\cdot\frac{U}{r_1+r_2}; \quad B = \alpha\frac{r_1+r_2}{r_1 r_2}.$$

Тогда дифференциальное уравнение запишется в виде

$$\frac{dq}{A^2 - q^2} = B\,dt;$$

$$A = \sqrt{\frac{r_1}{\alpha}\cdot\frac{U}{r_1+r_2}} = \sqrt{\frac{1}{10^4}\cdot\frac{200}{2}} = 0{,}1 = q(\infty);$$

$$B = \alpha\frac{r_1+r_2}{r_1\cdot r_2} = 10^4\cdot\frac{2\cdot 10^3}{10^6} = 20 \quad (r_1 = 1000 \text{ Ом}, \; r_2 = 1000 \text{ Ом}).$$

4. Решим дифференциальное уравнение. Имеем табличный интеграл вида

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|;$$

$\int \frac{dq}{A^2-q^2} = Bt + C$, где C – постоянная интегрирования, определяемая из начальных условий.

$$\frac{1}{2A}\ln\frac{|A+q|}{|A-q|} = Bt + C.$$

Для данной задачи $q < A$ $[q(0_+) = 0{,}05$ Кл, $q(\infty) = A = 0{,}1$ Кл$]$, поэтому можно опустить знак модуля. Подставляя известные величины, получаем:

$$5\ln\frac{0{,}1+q}{0{,}1-q} = 20t + C.$$

При $t=0$ $\quad 5\ln\frac{0{,}1+0{,}05}{0{,}1-0{,}05} = C$, откуда $C = 5\ln 3$;

$$5\ln\frac{0{,}1+q}{0{,}1-q}\cdot\frac{1}{3} = 20t;$$

$$\ln\frac{0{,}1+q}{0{,}1-q}\cdot\frac{1}{3} = 4t;$$

$$\frac{0{,}1+q}{0{,}1-q}\cdot\frac{1}{3} = e^{4t};$$

$$q = 0{,}1\,\frac{3-e^{-4t}}{3+e^{-4t}};$$

$$u_c = \alpha q^2 = 10^4\cdot 10^{-2}\left(\frac{3-e^{-4t}}{3+e^{-4t}}\right)^2 = 100\left(\frac{3-e^{-4t}}{3+e^{-4t}}\right)^2.$$

Проверка по начальным и конечным значениям дает:

$u_c(0_+) = 100\cdot\frac{4}{16} = 25$ В,

$u_c(\infty) = 100$ В.

Постоянная времени цепи $T = 1/4$ с. Переходный процесс практически закончится за время $t_{пер.пр} \approx 4T \approx 1$ с. На рис. 44в показан график зависимости $u_c(t)$.

Задача 7.2. Постоянная ЭДС E включается в цепь, состоящую из последовательно соединенных сопротивления r и нелинейной индуктивности. Характеристика индуктивности для положительных значений тока приближенно может быть выражена формулой

$$i = \alpha\Psi^2 \quad \text{или} \quad \Psi = \sqrt{\frac{i}{\alpha}}.$$

Определить потокосцепление и ток в переходном режиме.

Р е ш е н и е. Записываем дифференциальное уравнение для времени переходного процесса $t \ge 0_+$

$$\frac{d\Psi}{dt} + ri = E, \quad \frac{d\Psi}{dt} + r\alpha\Psi^2 = E.$$

В полученном уравнении переменные могут быть разделены и уравнение проинтегрировано (сведено к табличному интегралу):

$$t = \int dt = \int\frac{d\Psi}{E - r\alpha\Psi^2} = \frac{\Psi_{уст}}{E}\int_{\Psi_0}^{\Psi}\frac{d\left(\frac{\Psi}{\Psi_0}\right)}{1-\left(\frac{\Psi}{\Psi_0}\right)^2},$$

$$t = \tau\,\mathrm{th}\frac{\Psi}{\Psi_0}, \qquad (1*)$$

где $\tau = \frac{\Psi_{уст}}{E}$.

Потокосцепление установившегося режима $\Psi_{уст}$ соответствует току установившегося режима $I_{уст} = E/r$. По характеристике $\Psi_{уст} = \sqrt{I_{уст}/\alpha}$, $\Psi^2_{уст} = E/r\alpha$; $\Psi(0) = 0$. Из соотношения (1*) и характеристики получаем расчетные выражения

$$\Psi(t) = \Psi_{уст}\,\mathrm{arth}\frac{t}{\tau},$$

$$i(t) = I_{уст}\,\mathrm{arth}^2\frac{t}{\tau}$$

Задача 7.3. Конденсатор C = 80 мкФ, $u_C(0)$ = 100 В разряжается через нелинейное сопротивление, ВАХ которого задана на рис. 45. Определить ток в цепи методом условной линеаризации.

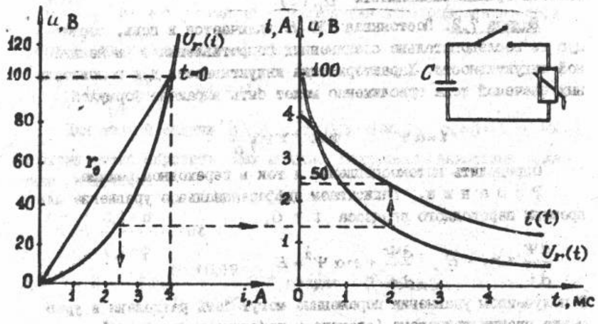

Рис. 45

Р е ш е н и е. Соединяем на характеристике $u_r(i)$ точку начала $u_r(0) = u_C(0) = 100$ В, $i = 4$ А и точку конца процесса $u_{r\,уст} = 0$, $i_{уст} = 0$. Полученной прямой соответствует линейное сопротивление $r_0 = 100:4 = 25$ Ом.

Напряжение $u_r(t)$ линеаризованной цепи, определенное классическим либо операторным методом, равно

$$u_r(t) = u_C(t) = u_C(0)e^{-\frac{t}{r_0 C}} = 100e^{-500t}\ \text{В}; \qquad (2ж)$$

$\tau = r_0 C = 2$ мс.

По формуле (2ж) строим график напряжения $u_r(t)$ и, наконец, отображая точки этого графика относительно нелинейной характеристики $u_r(i)$, получаем график тока $i(t)$ (см. рис. 45).

Задача 7.4. Постоянная ЭДС E = 20 В включается в цепь, состоящую из последовательно соединенных сопротивления r = 40 Ом и нелинейной емкости. Характеристика емкости изображена на рис. 46. Начальное напряжение на емкости $u_C(0-)$ = = 120 В.

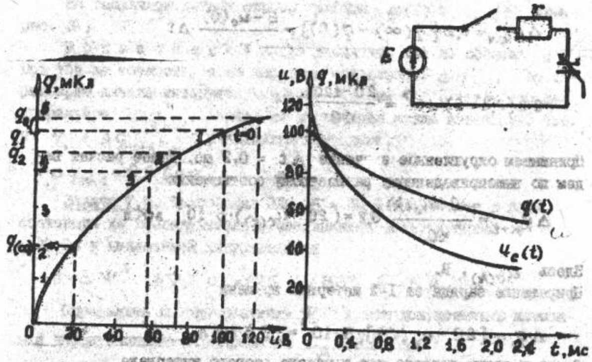

Рис. 46

Определить напряжение и заряд емкости методом последовательных интервалов времени.

Р е ш е н и е. Определяем начальную и конечную точки на характеристике. Начальному напряжению $u_C(0)$ = 120 В по характеристике соответствует заряд $q(0)$ = 5 мКл, конечному напряжению $u_C(\infty) = E$ = 20 В - заряд $q(\infty)$ = 2,2 мКл (см. рис. 46).

Записываем дифференциальное уравнение цепи

$$r\frac{dq}{dt} + u_c = E,$$

откуда, заменив дифференциалы приращениями, получим разностное соотношение

$$\Delta q_{(k+1)} = \frac{E - u_{c(k)}}{r}\cdot\Delta t,$$

где k - номер интервала времени; $k = 0$ соответствует началу интервала, $k = 1$ - концу первого и началу второго и т.д., $t_k = k\cdot\Delta t$. Численное значение Δt выберем, задавшись начальным приращением заряда

$$\Delta q_{нач} = 0{,}2\,[q(\infty) - q(0)] = \frac{E - u_c(0)}{r}\cdot\Delta t$$

$$0{,}2(2{,}2-5)\cdot 10^{-3} = \frac{20-120}{40}\cdot\Delta t.$$

Принимаем округленное значение $\Delta t = 0{,}2$ мс. Далее расчет ведем по вышеприведенному разностному соотношению

$$\Delta q_{k+1} = \frac{20 - u_c(k)}{40}\cdot 0{,}2 = (20 - u_{c(k)})\cdot 5\cdot 10^{-3} \text{ мКл}.$$

Здесь $u_{c(k)}$, В.

Приращение заряда за I-й интервал времени

$$\Delta q_1 = [20 - u_c(0)]\cdot 5\cdot 10^{-3} = -0{,}5 \text{ мКл}.$$

Заряд в конце первого или в начале второго интервала

$$q_1 = q(0) + \Delta q_1 = 5 - 0{,}5 = 4{,}5 \text{ мКл}.$$

Этому заряду соответствует по характеристике напряжение u_{c1} = = 90 В. Аналогично находим $\Delta q_2 = (20-90)\cdot 5\cdot 10^{-3} = -0{,}35$ мКл, $q_2 = q_1 + \Delta q_2 = 4{,}5 - 0{,}35 = 4{,}15$ мКл, $u_{c_2} = 72$ В и т.д.

Расчет сводим в таблицу.

k	$t = k\Delta t$, мс	$u_{c(k)}$, В	q_k, мКл	Δq_{k+1}, мКл
0	0	120	5,00	–0,50
I	0,2	90	4,50	–0,35
2	0,4	72	4,15	–0,25
3	0,6	64	3,90	–0,22
4	0,8	56	3,68	–0,18
5	I,0	50	3,50	–0,15
6	I,2	47	3,35	–0,13
7	I,4	42	3,22	–0,11
8	I,6	39	3,11	–0,09
9	I,8	37	3,02	–0,08
I0	2,0	35	2,94	

По табличным данным строим графики $q(t)$ и $u_c(t)$ (см. рис. 46).

П р и м е ч а н и е. Можно увеличить шаг по времени Δt при той же точности, если находить приращение $\Delta q'_{k+1}$ по параметрам начала интервала времени, т.е. по q_k, затем это же приращение $\Delta q''_{k+1}$ найти по параметрам конца интервала, т.е. по $q_k + \Delta q_{k+1}$, и результаты усреднить:

$$\Delta q_{k+1} = 0{,}5\,(\Delta q'_{k+1} + \Delta q''_{k+1}).$$

Задача 7.5. Постоянная ЭДС $E = 50$ В включается в цепь, состоящую из последовательно соединенных сопротивления r = = 40 Ом и нелинейной индуктивности

$$i = a\Psi^3 + b\Psi, \quad a = 125 \text{ А/Вб}^3, \; b = 5 \text{ А/Вб}.$$

Определить потокосцепление $\Psi(t)$ методом конечных изменений дифференциального параметра $L_д = d\Psi/di$.

Р е ш е н и е. В линейной цепи r, L потокосцепление определяется по формуле

$$\Psi(t) = \Psi_\infty - [\Psi_\infty - \Psi(0)]\,e^{pt}, \tag{а}$$

где $\Psi(0)$ и Ψ_∞ – соответственно начальное и конечное потокосцепление.

В нелинейной цепи корень характеристического уравнения зависит от дифференциального параметра, т.е. от потокосцепления

$$p(\Psi) = -\frac{r}{L_д} = -r\frac{di}{d\Psi} = -r\,(3a\Psi^2 + b). \tag{б}$$

Зададимся рядом значений времени $t_k = t_0 + \Sigma\,\Delta t_k$. В простейшем случае $\Delta t = \text{const}$, $t = 0$, $t_k = k\Delta t$. Задача состоит в определении потокосцепления Ψ_k в моменты времени t_k.

Если за время Δt_k потокосцепление Ψ изменится от Ψ_{k-1} до Ψ_k при $p(\Psi) \simeq p_{k.ср} \simeq p_{k-1}$, то по аналогии с формулой (а) можно записать выражение для потокосцепления Ψ_k в конце k-го интервала времени

$$\Psi_k = \Psi_\infty - (\Psi_\infty - \Psi_{k-1})\,e^{\Delta t\, p_{k-1}}, \tag{в}$$

где $p_{к-1}$ определяется согласно формуле (б) по известному потокосцеплению $\Psi_{к-1}$ в начале к -го интервала времени.

Определив начальный и конечный ток $i(0)=0$, $I_\infty = E/r$ и по характеристике - соответствующие потокосцепления $\Psi_0=\Psi(0)=0$ и $\Psi_\infty=\Psi(I_\infty)$, производим циклический расчет промежуточных значений $\Psi_к$ по формулам (б) и (в)

$$p_0=-r(0-b),\quad \Psi_1=\Psi_\infty-(\Psi_\infty-\Psi_0)\,e^{\Delta t p_0},$$

$$p_1=-r(3\alpha\Psi_1^2+b),\quad \Psi_2=\Psi_\infty-(\Psi_\infty-\Psi_1)\,e^{\Delta t p_1} \quad \text{и т.д.}$$

Величинам Ψ_0, Ψ_1, Ψ_2, ... соответствуют моменты времени 0, Δt, $2\Delta t$, ...

Выбор величины Δt можно сделать методом условной линеаризации $\Delta t = (0{,}2...0{,}5)\,\tau_{усл}$ или следующим образом: исходя из начального значения потокосцепления $\Psi(0)$, задаться первым значением $\Psi_1=\Psi(0)+(0{,}1...0{,}3)[\Psi_\infty-\Psi(0)]$ и после подстановки в формулу (в) решить ее относительно Δt, полагая $p_{к-1}=p_0=p\,[\Psi(0)]$.

8. РАСЧЕТ РЕЖИМОВ РАБОТЫ ДВИГАТЕЛЯ ПОСТОЯННОГО ТОКА (ДПТ) МАЛОЙ МОЩНОСТИ

Задача 8.1. Двигатель в режиме противовключения развивает скорость 200 рад/с при моменте нагрузки $M = 5\cdot10^{-2}$ Н·м и токе якоря $I_я = 2$ А. Определить величину добавочного сопротивления в цепи якоря, обеспечивающего заданный режим работы, если $U = 24$ В, $r_я = 1{,}15$ Ом, $c_e\Phi = \alpha = 0{,}04$.

Р е ш е н и е. Уравнение механической характеристики ДПТ в режиме противовключения имеет вид

$$-\Omega = \frac{U}{\alpha} - (r_я + r_д)\frac{M}{\alpha\beta},$$

где $\alpha = c_e\Phi = 0{,}04$, $\beta = c_M\Phi$.

Величину β определяем из соотношения

$M = c_M \Phi I_я$,

откуда

$$c_M\Phi=\beta=\frac{M}{I_я}=\frac{5\cdot10^{-2}}{2}=0{,}025;$$

$$r_я+r_д=\left(\frac{U}{\alpha}+\Omega\right)\frac{\alpha\cdot\beta}{M};$$

$$r_д=\left(\frac{U}{\alpha}+\Omega\right)\frac{\alpha\cdot\beta}{M}-r_я=\left(\frac{24}{0{,}04}+200\right)\frac{0{,}04\cdot0{,}025}{5\cdot10^{-2}}-1{,}15=$$

$$=16-1{,}15=14{,}85\ \text{Ом};\quad r_д=14{,}85\ \text{Ом}.$$

Механическая характеристика ДПТ в режиме противовключения показана на рис. 47 (прямая 2).

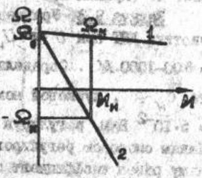

Рис. 47

Задача 8.2. Уравнение естественной механической характеристики ДПТ задано в виде

$$\Omega = 30\,U - 1500\,M.$$

При моменте $M_н = 5\cdot10^{-2}$ Н·м определить ток якоря, если $r_я = 1{,}67$ Ом, скорость n, если $U = U_н = 13$ В.

Р е ш е н и е. Уравнение естественной механической характеристики можно записать в виде

$$\Omega = \frac{U}{\alpha} - r_я\frac{M}{\alpha\cdot\beta}.$$

Сравнивая его с заданным уравнением, получаем

$$U/\alpha = 30\,U, \qquad \text{откуда}\quad \alpha = 1/30;$$

$$\frac{r_я}{\alpha\cdot\beta}=1500,\ \text{следовательно,}\ \frac{1{,}67}{\frac{1}{30}\beta}=1500 \qquad \beta\approx\frac{50}{1500}=\frac{1}{30}$$

Определяем номинальный ток якоря

$$I_{я\,н}=\frac{M_н}{c_M\Phi}=\frac{M_н}{\beta}=\frac{5\cdot10^{-2}\cdot30}{1}=1{,}5\ \text{А}$$

Находим номинальную скорость

$$\Omega_н=30\,U_н-1500\,M_н=30\cdot13-1500\cdot10^{-2}\approx314\ \text{с}^{-1},$$

$$\Omega_н = \frac{2\pi n_н}{60} = \frac{\pi n_н}{30}; \quad 314 = \frac{3,14 \cdot n_н}{30}, \text{ откуда}$$

$$n_н = \frac{3,14 \cdot 30}{3,14} = 3\,000 \ \frac{об}{мин}.$$

Скорость холостого хода равна:

$$\Omega_0 = \frac{U_н}{\alpha} = \frac{13 \cdot 30}{1} = 390 \ c^{-1}.$$

Естественная механическая характеристика представлена на рис. 47 (прямая I).

Задача 8.3. Уравнение естественной механической характеристики ДПТ при $U = U_н = 24$ В и $r_я = 1$ Ом имеет вид $\Omega = 600 - 1000\,M$. Определить постоянные скорости $c_e\Phi$ и момента $c_м\Phi$, пусковой момент двигателя. При моменте $M_н = 5 \cdot 10^{-2}$ Н·м, регулируя скорость, получили $\Omega_и = 600$ с$^{-1}$. Каким способом регулирования получили эту скорость при $U = U_н$? Чему равен коэффициент изменения параметров? Уравнение искусственной характеристики ДПТ задано в виде

$$\Omega = 659,34 - 1207,6\,M.$$

Р е ш е н и е.

1. Определяем постоянные скорости и момента:

$$\Omega = \frac{U}{\alpha} - r_я \frac{M}{\alpha \beta} = 600 - 1000\,M;$$

$$U = U_н = 24 \text{ В}, \ \alpha = c_e\Phi, \ \beta = c_м\Phi.$$

$$\frac{U}{\alpha} = \frac{24}{\alpha} = 600, \text{ откуда } \alpha = \frac{24}{600} = 0,04.$$

$$\frac{r_я}{\alpha \beta} = 1000 \ \frac{1}{0,04\beta} = 1000, \text{ откуда } \beta = \frac{1}{40} = 0,025.$$

2. Пусковой момент вычислим, положив $\Omega = 0$:

$$0 = 600 - 1000\,M_п, \text{ откуда } M_п = 0,6 \text{ Н·м},$$

или

$$I_{яп} = \frac{U_н}{r_я} = \frac{24}{1} = 24 \text{ А},$$

$$M_п = c_м \Phi I_{я.п} = \frac{1}{40} \cdot 24 = 0,6 \text{ Н·м}$$

3. Определим номинальную скорость:

$$\Omega_н = 600 - 1000\,M_н = 600 - 1000 \cdot 5 \cdot 10^{-2} = 550 \ c^{-1}.$$

Задано: $\Omega_и = 600$ с$^{-1}$ при $M = M_н = 5 \cdot 10^{-2}$ Н·м.

Скорость регулировали путем уменьшения потока Φ (см. естественную (I) и искусственную (2) характеристики на рис. 48). Искусственная характеристика 2 построена при $\Phi < \Phi_н$.

Рис. 48

4. Рассчитаем степень ослабления магнитного потока Φ для обеспечения заданного режима $M = M_н = 5 \cdot 10^{-2}$ Н·м, $\Omega_и = 600$ с$^{-1}$:

$$\Omega_и = \frac{U_н}{c_e \Phi \gamma} - \frac{M_н r_я}{c_e \Phi c_м \Phi \gamma^2} = \frac{U_н}{\alpha \gamma} - \frac{M_н r_я}{c_e \Phi c_м \Phi \gamma^2} = \frac{U_н}{\alpha \cdot \gamma} - \frac{M_н \, r_я}{\alpha \beta \gamma^2};$$

$$600 = \frac{600}{\gamma} - \frac{50}{\gamma^2};$$

$$600\gamma^2 - 600\gamma + 50 = 0;$$

$$\gamma^2 - \gamma + \frac{1}{12} = 0;$$

$$\gamma_{1,2} = \frac{1}{12} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{12}};$$

$$\gamma_{1,2} = 1/2 \pm \sqrt{1/6} \approx 0,5 \pm 0,41.$$

Выбираем значение $\gamma = 0,91$.

Уравнение искусственной механической характеристики имеет вид:

$$\Omega = \frac{600}{0,91} - \frac{1000\,M}{0,91 \cdot 0,91} = 659,34 - 1207,6\,M.$$

Коэффициент изменения параметров равен:

$$1/0,91 \approx 1,0989.$$

9. РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ ТРАНСФОРМАТОРОВ И АСИНХРОННЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ МАЛОЙ МОЩНОСТИ

<u>Задача 9.1</u>. Из опытов холостого хода и короткого замыкания трансформатора при $U_{1н}/U_{2н}$ = 220/110 В, f = 50 Гц, получены следующие результаты. Режим ХХ $U_{1х}$ = 220 В, $I_{1х}$ = 0,22 А, $P_{1х}$ = 29 Вт; режим КЗ $U_{1к}$ = 10 В, $I_{1к}$ = 2 А, $P_{1к}$ = 12 Вт. Измерения проводились на стороне высокого напряжения. Определить параметры схемы замещения трансформатора и изобразить ее с обозначением этих параметров.

Р е ш е н и е.

1. Из опыта холостого хода определяем коэффициент трансформации n, а также параметры r_0 и x_0 схемы замещения:

$$n = \frac{U_1}{U_{20}} = \frac{220}{110} = 2;$$

$$z_0 = \frac{U_{1х}}{I_{1х}} = \frac{220}{0,22} = 1000 \text{ Ом};$$

$$r_1 \ll r_0; \quad r_0 = \frac{P_{1х}}{I_{1х}^2} = \frac{29}{0,22^2} = 600 \text{ Ом};$$

$$x_0 = \sqrt{z_0^2 - r_0^2} = 800 \text{ Ом}.$$

2. Из опыта короткого замыкания определяем параметры r_1, r_2', x_{1s}, x_{2s}' схемы замещения:

$$r_1 + r_2' = r_к = \frac{P_{1к}}{I_{1к}^2} = \frac{12}{2^2} = 3 \text{ Ом};$$

$$r_1 = r_2' = \frac{r_к}{2} = 1,5 \text{ Ом};$$

$$x_{1s} + x_{2s}' = x_к.$$

$$z_к = \sqrt{r_к^2 + x_к^2} = \frac{U_{1к}}{I_{1к}} = \frac{10}{2} = 5 \text{ Ом},$$

$$x_к = \sqrt{z_к^2 - r_к^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \text{ Ом};$$

$$x_{1s} = x_{2s}' = x_к/2 = 2 \text{ Ом}$$

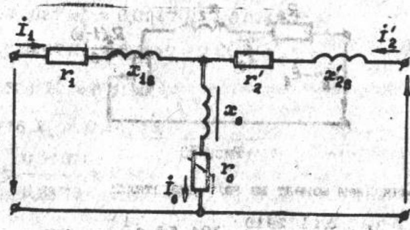

Рис. 49

Схема замещения приведенного трансформатора представлена на рис. 49.

<u>Задача 9.2</u>. Найти механическую мощность трехфазного асинхронного двигателя (АД), вращающегося со скоростью n_2 = 2910 об/мин, если в заторможенном роторе E_2 = 21,213 В, f_1 = 50 Гц, R_2 = 0,024 Ом, L_{2s} = 19,108·10^{-4} Гн. Определить момент на валу двигателя.

Р е ш е н и е.

1. Определяем скорость вращения магнитного поля статора:

$$n_1 = 60 \cdot f_1 = 60 \cdot 50 = 3000 \ \frac{\text{об}}{\text{мин}}.$$

2. Находим величину скольжения:

$$s = \frac{n_1 - n_2}{n_1} = \frac{3000 - 2910}{3000} = 0,03.$$

3. Определяем индуктивное сопротивление неподвижного ротора:

$$x_2 = \omega L_2 = 2\pi f_2 L_2 = 2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 19,108 \cdot 10^{-4} = 0,6 \text{ Ом}.$$

4. Находим механическую мощность (см. схему замещения ротора АД, представленную на рис. 50) асинхронного двигателя:

$$P_{мех} = \left| \frac{E_2}{\sqrt{\left(\frac{R_2}{s}\right)^2 + x_2^2}} \right|^2 \frac{R_2(1-s)}{s} \approx 349,2 \text{ Вт}.$$

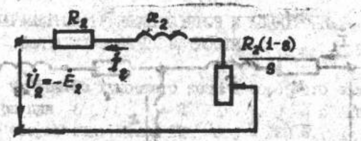

Рис. 50

5. Вычисляем момент на валу двигателя:

$$\Omega_2 = \frac{\pi n_2}{30} = \frac{3,14 \cdot 2910}{30} = 304,58\ c^{-1};$$

$$M = \frac{P_{мех}}{\Omega_2} = \frac{349,2}{304,58} = 1,15\ Н\cdot м.$$

Задача 9.3. Определить отношение активного сопротивления к индуктивному в неподвижном роторе асинхронного двигателя, если $I_п / I_н = 3$ при $s = 0,0524$.

Решение. При неподвижном роторе АД ток в роторе выражается формулой

$$I_{2п} = \frac{E_2}{\sqrt{R_2^2 + x_2^2}}.$$

Ток во вращающемся роторе находится по формуле

$$I_2 = \frac{E_2 \cdot s}{\sqrt{R_2^2 + s^2 x_2^2}}.$$

Зная величину скольжения $s = 0,0524$ и отношение $I_{2п}/I_2 = 3$, нетрудно определить отношение активного сопротивления к индуктивному в неподвижном роторе:

$$\frac{E_2 \sqrt{R_2^2 + s^2 x_2^2}}{\sqrt{R_2^2 + x_2^2}\, E_2 \cdot s} = \frac{\sqrt{R_2^2 + (0,0524)^2 x_2^2}}{\sqrt{R_2^2 + x_2^2}\cdot 0,0524} = 3;$$

$$R_2^2 + (0,0524)^2 x_2^2 = 9\,(R_2^2 + x_2^2)(0,0524)^2,$$

$$R_2^2 + 0,0027\, x_2^2 \approx 0,0247\, R_2^2 + 0,0247\, x_2^2;$$

$$R_2^2 - 0,0247 R_2^2 \approx 0,0247 - 0,0027\, x_2^2;$$

$$0,97529\, R_2^2 \approx 0,0220\, x_2^2,$$

$$0,9876\, R_2 \approx 0,1482\, x_2,$$

$$\frac{R_2}{x_2} \approx \frac{0,1482}{0,9876} \approx 0,15$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Редакция заказной литературы

Галина Анатольевна Гладилина

Сборник задач по ТОЭ
для проведения семинаров и рубежного контроля

Заведующая редакцией Н.Г.Ковалевская

Редактор Л.М.Элькинд

Корректор Л.И.Малютина

Подписано в печать I4.03.95. Формат 60x84/16. Бумага тип. №
Печ.л. 4,75. Усл.печ.л. 4,42. Уч.-изд.л. 4,58.
Тираж I000 экз. Изд. № 5. Заказ 266 С

Издательство МГТУ, типография МГТУ.
I07005, Москва, 2-я Бауманская, 5.